5a Giornata Nazionale di Analisi Non Standard

Ruggero Ferro

RITORNO ALL’ANALISI INFINITESIMALE

Punti che saranno toccati:

Problemi dalla realtà e numeri trascurabili

Ipernaturali e nozioni di infinito

Ruolo degli ipernaturali

Confronto tra nozioni di limite

Ruolo del linguaggio

Conclusione

Problemi dalla realtà e numeri trascurabili

Il linguaggio (sia formale che informale) non è in grado di precisare di cosa sta parlando, senza assumere che sia noto, per via non linguistica, il significato di alcune parole.

Ecco problemi che hanno portato all'analisi matematica: velocità istantanea, pendenza in un punto, volume di un solido anche se non limitato da facce poligonali piane.

Velocità istantanea

La velocità istantanea è il rapporto tra lo spostamento in un istante e la durata dell'istante stesso, durata che è così assolutamente piccola da essere non apprezzabile, è trascurabile.

Problemi dalla realtà e numeri trascurabili

Fotografare la velocità istantanea di un oggetto. Minore è il tempo di esposizione meno mossa sarà l'immagine e la velocità istantanea potrebbe essere valutata come rapporto tra l'imprecisione dei contorni e il tempo di esposizione.

Macchina fotografica con tempo di apertura assolutamente piccolo, e imprecisione dei contorni dell'immagine assolutamente piccoli da essere trascurabili.

Comunque il rapporto tra imprecisione dei contorni e tempo di apertura ci dà una valutazione della velocità istantanea, dipendente dal tempo di apertura, ma con variazioni trascurabili.

Problemi dalla realtà e numeri trascurabili

Questi problemi ci portano a immaginare variazioni trascurabili in un continuo di possibilità, con le difficoltà del concetto di continuo senza buchi né interruzioni:

1) Misurare contando le unità di misura contenute. NO: ci sono gli incommensurabili.

2) Vorremmo almeno misurare approssimando con razionali.

Ma, perché mai tra le approssimazioni razionali per difetto e quelle per eccesso ci deve essere un solo elemento separatore?

Se ce ne fossero più di uno? La distanza tra loro sarebbe minore di $1/n$ per ogni naturale n positivo. Si sente l'esigenza di grandezze trascurabili/infinitesime.

Diciamo che una grandezza ξ positiva è trascurabile (piccola in modo assoluto) se, $0 < \xi$ e, per ogni naturale positivo n, $\xi < 1/n$.

Caratteristica dei numeri trascurabili non nulli: aggiungendo trascurabili si mantiene la trascurabilità.

Se ξ è maggiore di 0 e minore di $1/n$ per ogni n naturale positivo, allora, per ogni k naturale positivo, $k \times \xi$ è pure maggiore di 0 (ovvio) e minore di $1/n$ per ogni n positivo.

Infatti, dall'ipotesi ($\xi<1/m$ per ogni naturale positivo m) segue che, per ogni scelta dei naturali positivi k e n, $\xi < 1/(k\times n)$ (anche $k\times n$ è un naturale positivo), sicché $k\times\xi < k\times1/(k\times n)$, cioè $k\times\xi < 1/n$, per ogni n naturale positivo, e $k\times\xi$ è trascurabile. QED.

E' accettabile il trascurabile, l'assolutamente piccolo non nullo?

Grandezze, anche se trascurabili, possono portare a risultati utili: un rapporto tra due di esse può essere non trascurabile:

$$\xi/\xi = 1$$

Problemi dalla realtà e numeri trascurabili

Se si accettano i numeri trascurabili e si vuole che questi siano numeri a tutti gli effetti, bisogna costruire un nuovo sistema numerico (detto degli iperreali) che, oltre loro, includa i reali e sia chiuso per le usuali operazioni.

Iperreali infiniti: in valore assoluto maggiori di tutti i numeri naturali,

Iperreali finiti: in valore assoluto minori di un qualche naturale.

Gli iperreali finiti sono del tipo un reale più un infinitesimo, e il reale infinitamente vicino a un iperreale finito viene detto parte reale o parte standard dell'iperreale finito.

Ci si può fare un'idea di cosa sono e come agiscono i trascurabili e gli iperreali?

Principio di Leibniz: hanno tutte le stesse proprietà dei numeri.

Non tutte! (no l'archimedeità). Quali allora? Quelle che vanno bene!

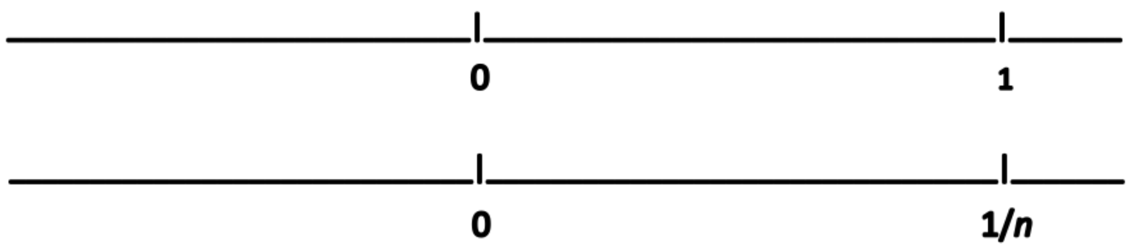
Problemi dalla realtà e numeri trascurabili

Il rifiuto degli infinitesimi non fu per questa imprecisione, ma per una rigida mentalità archimedea: <u>non ci può essere niente</u> tra 0 e tutti i numeri del tipo 1/*n*, con *n* naturale positivo.

Perché tale divieto? Perché la retta deve essere archimedea?

Per vedere meglio come è fatta la retta nei pressi dell'origine ingrandiamola (zoom in ×*n*): i vari punti si saranno allontanati, ma la retta appare immutata.

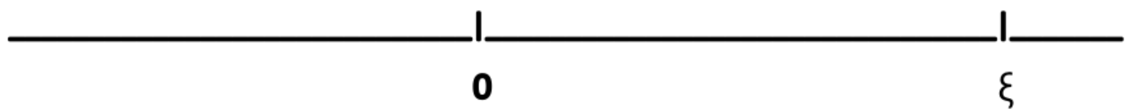
zoom in ×*n*



Problemi dalla realtà e numeri trascurabili

E se si potesse ingrandire infinite volte?

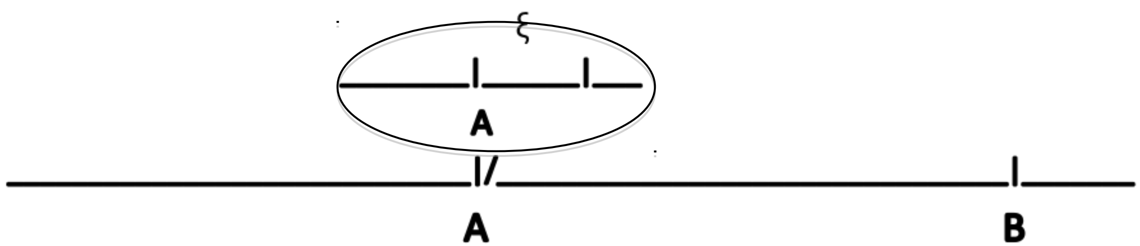
Zoom in $\times 1/\xi$



L'immagine della retta con la sua origine rimarrebbe inalterata.

Il tratto di retta che continuiamo a vedere sarà costituito da punti tutti infinitamente vicini all'origine.

E se volessimo andare da un punto *A* a un punto *B,* visibili sulla retta nella scala usuale, mediante passi di lunghezza infinitesima,



quanti passi si devono fare? Facendone un numero finito si rimane sempre infinitamente vicino ad *A*, sicché per arrivare a *B* bisogna fare infiniti passi.

Bisogna accettare i numeri naturali infiniti che contano tali passi!

Ma cosa sono i naturali infiniti?

Questa nozione di infinito è diversa da quella di Cantor e di Peano.

Tutti numeri si possono ottenere a partire da 0 ripetendo un numero finito di volte l’operazione di passaggio al successore immediato.

Addirittura Peano, con il principio di induzione, chiede che i numeri naturali siano il minimo insieme chiuso per passaggio all’immediato successore a partire da 0.

Perché considerare numeri naturali solo quelli di questo minimo insieme chiuso per passaggio all’immediato successore?

Perché non continuare a contare (passare all'immediato successore) anche dopo aver esaurito i naturali di Peano?

La situazione potrebbe essere vista in questo modo;

avendo continuato a contare gli elementi di un insieme si è andati così avanti da aver perso il conto;

però, se si considera un ulteriore elemento dell'insieme questo sarà contato dal numero naturale successore immediato di quello sconosciuto (avendo perso il conto) cui si era arrivati,

e se si continuano a considerare altri elementi il numero corrispondente conterà queste aggiunte a partire dal numero che non si conosce.

Considerando una quantità molto grande, si può andare avanti tanto da perdere nuovamente il conto, tuttavia si può riprendere a considerare un ulteriore elemento alla volta e così continuare a contare.

Addirittura, si può immaginare di perdere il conto di quante volte si è perso il conto, e tuttavia continuare a contare.

Concepiamo i naturali infiniti proprio come i naturali, ordinati e con le loro proprietà:

- tra un numero e il suo successore immediato non c’è niente,
- ognuno di questi numeri, fuorché 0, ha predecessore immediato,
- si possono sommare, sottrarre, moltiplicare e dividere con resto, con il solito significato di queste operazioni,
- e si possono confrontare tra loro gli elementi di una qualsiasi insieme S (ad esempio per dire chi è il più grande), purché S sia contabile da uno di questi numeri naturali, anche infiniti.

Ipernaturali e nozioni di infinito

Chiamiamo *ipernaturali* i numeri introdotti. Questi possono essere divisi in finiti (i soliti) e infiniti (quelli che seguono tutti i finiti).

Diremo poi *iperfinito* un insieme di elementi che può essere contato da un numero ipernaturale.

Perché non accettare gli ipernaturali?

Ciascuno costituisce un infinito in atto, secondo una nozione non cantoriana di infinito.

Il sistema degli ipernaturali è consistente se lo è quello dei naturali.

Poiché la matematica costruisce e organizza rappresentazioni mentali coerenti utili alla comprensione e gestione della molteplicità nella realtà, e i concetti che stiamo analizzando lo sono, non si capisce perché non debbano avere un ruolo importante in questa disciplina.

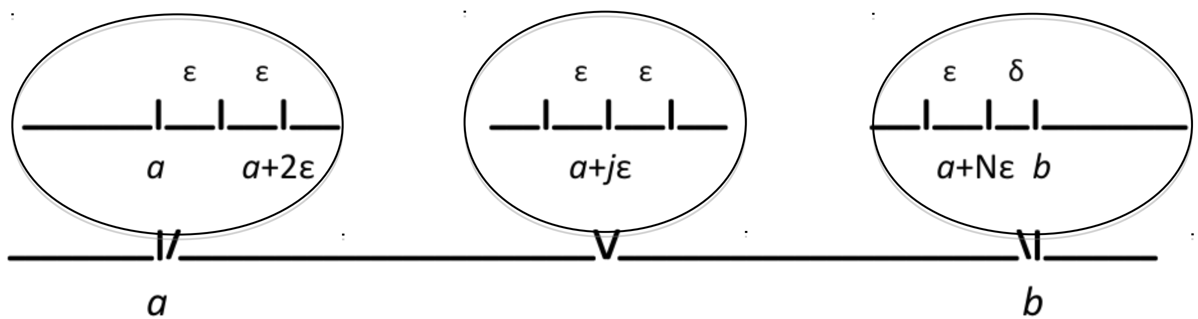
Ruolo degli ipernaturali

Gli ipernaturali sono molto importanti per ottenere molti risultati fondamentali dell'analisi:

vengono utilizzati per suddividere un intervallo [*a*,*b*] in parti di uguale lunghezza ε (fuorché forse l'ultima), anche se ε è un infinitesimo, mediante i punti:

$$a,\ a+\varepsilon,\ a+2\varepsilon,\ \dots,\ a+j\varepsilon,\ \dots,\ a+N\varepsilon,\ b$$

dove N è il massimo ipernaturale tale che $a+N\varepsilon$ è minore di *b*, e dove *j* è un ipernaturale minore o uguale a N.



Queste suddivisioni di un intervallo permettono di dimostrare facilmente i più profondi teoremi dell'analisi.

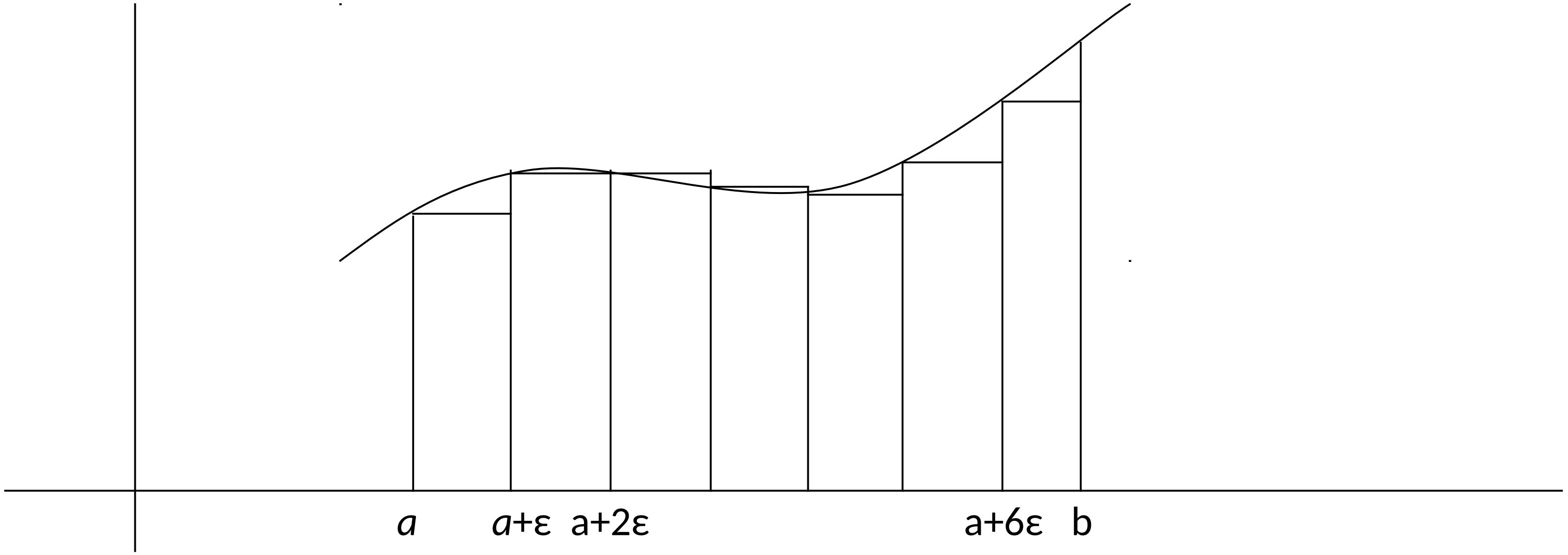
Una funzione f è detta continua in un intervallo chiuso se, per ogni coppia di iperreali x_1 e x_2 nell'intervallo, se $x_1 - x_2$ è un infinitesimo, allora allora anche $f(x_1) - f(x_2)$ è un infinitesimo.

- Data una funzione *f continua* in un intervallo chiuso, se *f* è a volte positiva e a volte negativa allora *f* ha almeno uno zero.
- Una funzione continua in un intervallo chiuso ha massimo e minimo.
- Si possono costruire facilmente le somme di Riemann normali, inferiori e superiori, sia finite che infinite, per una funzione positiva *f* in un intervallo chiuso $[a,b]$ e da queste l'integrale definito, dimostrando facilmente che misura l'area sotto *f*.

Ruolo degli ipernaturali

$f(a)\times\varepsilon + f(a+\varepsilon)\times\varepsilon + \ldots + f(a+j\varepsilon)\times\varepsilon + \ldots + f(a+(N-1)\varepsilon)\times\varepsilon + f(a+N\varepsilon)\times(b-(a+N\varepsilon)) =$

$\left(\sum_{j=0}^{N} f(a+j\varepsilon)\times\varepsilon\right) + f(a+N\varepsilon)\times(b-(a+N\varepsilon)) = \sum_a^b f(x)\times\varepsilon$



Si dimostrano anche (sempre senza difficoltà) tutte le altre proprietà degli integrali definiti, incluso il teorema fondamentale del calcolo.

Confronto tra nozioni di limite

Confronto tra i metodi “classici” con quelli “non standard” per quanto riguarda la nozione di limite.

Classicamente ci si rifà alla nozione di limite per definire continuità, derivate, integrali e quant’altro. Essa è basata sulla nozione di “piccolo”.

La nozione di piccolo non può essere assoluta,

- è solo relativa (più piccolo di una quantità fissata)

- non si preserva operando su di essa (una somma di “più piccoli di …” non è detto che sia “più piccola di …”)

Confronto tra nozioni di limite

La definizione classica dice: L è il limite di $f(x)$ per x tendente a c se

$$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall x\ ((x \neq c \wedge |x-c|<\delta) \rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon)$$

(e ci sono piccoli relativi come "più piccolo di δ" e "più piccolo di ε").

Difficile gioco delle tre quantificazioni alternate esattamente in quell'ordine, e della direzione dell'implicazione.

Questa definizione permette solo di verificare che un dato L è il limite, ma non dice come trovarlo. Bisogna utilizzare i teoremi sui limiti.

A scuola non si dimostrano questi teoremi, che sono sostituiti da regole, e la matematica è umiliata e perde il suo significato.

Confronto tra nozioni di limite

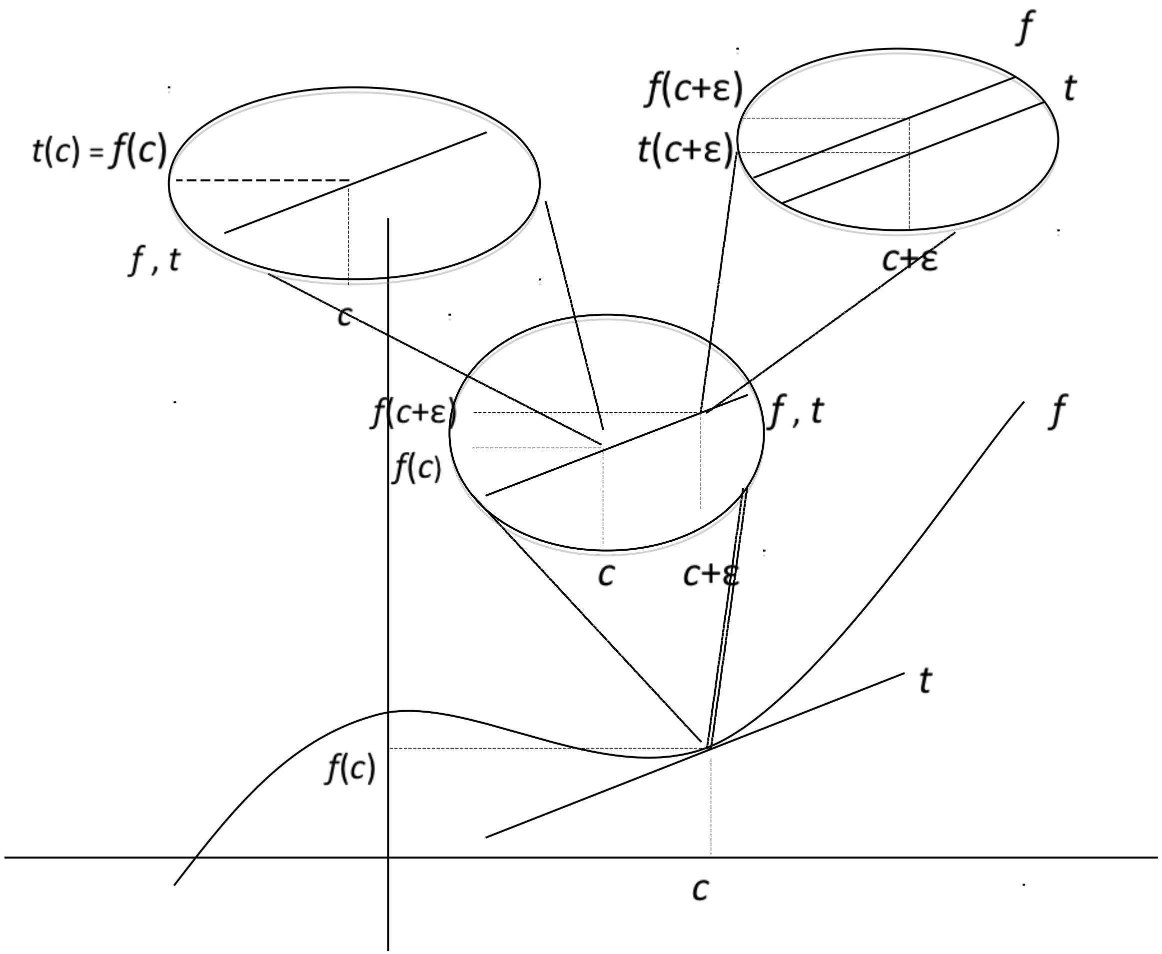
Prima di questa nozione di limite introdotta per abolire gli infinitesimi, l'analisi cominciava con la nozione di derivata:

Il tasso di variazione di una quantità (che è funzione *f* della variabile *x*) in un punto *c* è la parte reale del rapporto incrementale, se c'è ed è sempre la stessa per ogni incremento infinitesimo non nullo della variabile *x*:

$f'(c) = \mathrm{st}(\,(f(c+\varepsilon)-f(c))/\varepsilon\,)$ se questa c'è ed è sempre la stessa per ogni infinitesimo ε diverso da 0.

Il rapporto incrementale può essere diverso per diversi infinitesimi non nulli, ma se ha sempre la stessa parte reale, si possono trascurare i vari infinitesimi che distinguono il rapporto incrementale dalla sua parte reale, e questa è la pendenza del grafico della funzione in quel punto.

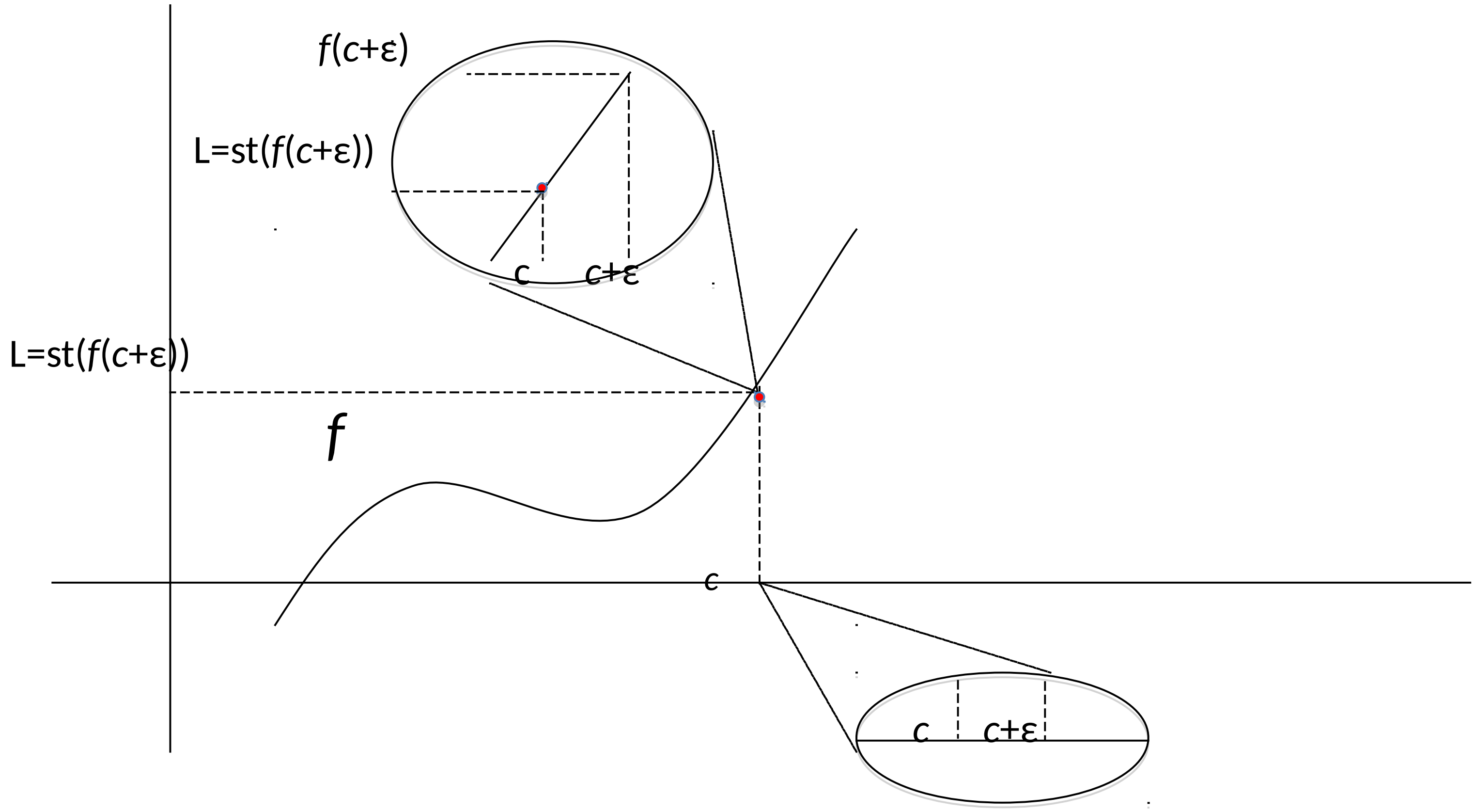
Confronto tra nozioni di limite



Confronto tra nozioni di limite

All'interno delle definizione di derivata c'è anche quella di limite:

Il limite della funzione *f* per *x* tendente a *c* è la parte reale della funzione calcolata in *c*+ε, st(*f*(*x*+ε)), se questa c'è ed è sempre la stessa per ogni infinitesimo non nullo ε.



Il limite descrive il comportamento della funzione *f* nei pressi di *c*.

Quello non standard indica il comportamento della funzione *f* nell'infinitamente vicino a *c* ma non in *c*, comportamento che consiste nell'avere tutti i valori della funzione, corrispondenti ai punti infinitamente vicini a *c* e diversi da *c*, infinitamente vicini a un unico numero reale L.

Questa definizione permette di calcolare il limite: basta considerare il valore $f(c+\varepsilon)$, con ε un qualsiasi infinitesimo non nullo, ed esprimerlo in modo da isolare le parti trascurabili (infinitesime) e trascurarle nel passare alla parte reale.

Siano $f(x) = (x^3+5x^2-x-5)/(x-1)$ e c=1. Allora

$f(1+\varepsilon) = ((1+\varepsilon)^3+5(1+\varepsilon)^2-(1+\varepsilon)-5)/((1+\varepsilon)-1) =$

$$(1+3\varepsilon+3\varepsilon^2+\varepsilon^3+5+10\varepsilon+5\varepsilon^2-1-\varepsilon-5)/\varepsilon = (12\varepsilon+8\varepsilon^2+\varepsilon^3)/\varepsilon = \varepsilon(12+8\varepsilon+\varepsilon^2)/\varepsilon =$$

$12+8\varepsilon+\varepsilon^2$, e, poiché $8\varepsilon+\varepsilon^2$ è un infinitesimo,

$$\mathrm{st}(f(1+\varepsilon)) = 12$$

Confronto tra nozioni di limite

Per fare ciò è necessario conoscere il comportamento di operazioni e funzioni rispetto alla suddivisione degli iperreali in infinitesimi non nulli, finiti (cioè minori in valore assoluto di un qualche numero naturale) non infinitesimi, infiniti (maggiori in valore assoluto di ogni numero naturale).

Questi comportamenti sono riassunti nelle seguenti tavole, dove ε, δ e γ indicano infinitesimi non nulli, *a*, *b* e *c* finiti non infinitesimi, H, J e K infiniti:

+	ε	a	H
δ	γ	c	K
b	c	c	K
J	K	K	?

×	ε	a	H
δ	γ	γ	?
b	γ	c	K
J	?	K	K

x	-*x*	1/*x*
δ	γ	K
b	c	c
J	K	γ

Ciascuno di questi risultati ha una facile dimostrazione, che è utilmente presentabile (per esercizio!) in una scuola superiore.

Confronto tra nozioni di limite

Vorrei proporre un paio di slogan che colgano le differenze tra le due nozioni di limite presentate.

La nozione non standard corrisponde a:

se mi impegno moltissimo, faccio benissimo,

con i superlativi assoluti.

La nozione classica corrisponde a:

so impegnarmi abbastanza da far meglio di quanto richiesto, qualunque sia la precisione voluta,

con i superlativi relativi.

C'è poi lo slogan relativo alla presentazione dei limiti in molti testi scolastici (le due colonne per i valori delle variabili indipendente e dipendente): più mi impegno, meglio faccio (ma non è detto che si raggiunga il traguardo). Questo slogan rappresenta una nozione che travisa gravemente quella di limite.

Confronto tra nozioni di limite

Anche in una presentazione non standard dell’analisi matematica può essere opportuno arrivare alla nozione classica di limite.

Da questo rapido confronto tra metodi “classici” e metodi “non standard”, dovrebbe essere emerso come la trattazione classica presenti nozioni e teoremi ostici, tanto che, nella didattica scolastica, si riducono le definizioni precise a nozioni intuitive, meglio vaghe e quindi incomprensibili (o le si fanno imparare a memoria senza coglierne il significato) e si tralasciano le dimostrazioni trasformandole in regole ingiustificate che umiliano la volontà di comprensione degli alunni, rendendoli macchine esecutrici che, giustamente, odiano la matematica.

Confronto tra nozioni di limite

D’altra parte, partendo dalle nozioni non standard (molto più accessibili), le dimostrazioni non standard per arrivare agli stessi teoremi su cui basare il calcolo sono molto semplici e presentabili in una scuola superiore, permettendo così agli studenti di acquisire il significato di ciò che stanno facendo e di giustificare i calcoli successivi.

Certo, bisognerà aver già introdotto iperreali e ipernaturali, ma una corretta presentazione di reali e naturali non è meno difficoltosa di quanto si sta proponendo di fare.

Ruolo del linguaggio

Fin qui tutto bello.

Dall'inizio si era detto che gli enti classici e i corrispondenti non standard devono avere le stesse proprietà, ma era problematico dire quali.

La risposta può presentare difficoltà didattiche.

Le proprietà che si devono mantenere sono tutte quelle esprimibili nel linguaggio dell'analisi classica.

Si noti che le nozioni di finito, di numero naturale, di numero reale, di archimedeità, e altre, non sono esprimibili nel linguaggio dei reali.

Ruolo del linguaggio

Già in prima elementare dovrebbe essere evidenziata la differenza tra numero e cifra, tra scrittura e suo significato.

Se non lo si è fatto in passato è perché si riteneva che qualunque significato fosse completamente descrivibile con il linguaggio, e che qualunque buona descrizione indicasse univocamente il suo significato.

Ma oggi si sa che non è così e sussiste l’enorme problema che anche le descrizioni più precise dei concetti che coinvolgono una qualche idea di infinito possono essere interpretate in modi totalmente diversi.

Conclusione

Quindi ben vengano i metodi non standard almeno per sollecitare una presa di coscienza delle difficoltà del linguaggio, presa di coscienza che dovrebbe essere presente nella scuola, specialmente negli insegnamenti di matematica e informatica, che basano il calcolo proprio sul collegamento e sulla differenza tra linguaggio e significato. Come si fa a parlare di variabili e di algebra senza aver presente questo rapporto?

Concluderei ricordando che i metodi non standard permettono, oltre a quanto già illustrato, modellizzazioni della realtà (in particolare della probabilità, della finanza, dell’economia, della biologia eccetera) non disponibili con i metodi classici, sicché danno allo studente che avanzi negli studi poderosi nuovi strumenti per la vita professionale.

Grazie per la vostra attenzione!

Spero che quanto presentato possa esservi utile.