Geometria Affine ed Euclidea dello Spazio

Nicola Sansonetto
Istituto Sanmicheli di Verona

8 Aprile 2016 - Istituto Tecnico “Marconi” di Verona

Linee guida del seminario

1. Un rapido riepilogo
   - Nelle indicazioni nazionali
   - Nei libri di testo
   - Una rapida e snella bibliografia
   - Nell'esame di stato e nelle simulazioni
   - Alcuni commenti
   - Struttura euclidea e alcune significative conseguenze
   - Nozioni Metriche
2. Riscaldamneto ... esame di stato e nelle simulazioni
3. Approfondiamo un po' ...
   - Nel piano
   - Nello spazio ...
4. Lavoro a gruppi ???
5. Commenti finali

Alcune fonti ...

- M. Abate, *Geometria.* McGraw–Hill.
- A. Bertapelle e M. Candilera, *Algebra lineare e primi elementi di Geometria.* McGraw–Hill.
  Un utile ma strana idea ...
- D. Hilbert and S. Cohn Vossen, *Geometria Intuitiva.* Bollati Boringhieri.
- R. Courant and H. Robbins, *Che cos'è la matematica.* Bollati Boringhieri.
- M. Audin, Geometry. Springer.
- I Libri di **H.S.M. Coxeter**:
  - *Introduction to Geometry.* John Wiley and Sons.
  - *Geometry Revisited.* http://www.aproged.pt/biblioteca/geometryrevisited_coxetergreitzer.pdf
  - *Projective Geometry.* Springer.

Alcuni commenti ...

- Uso delle eq. parametriche ...
- Determinante e prodotto misto e relativa interpretazione geometrica ...
- La nozione di lineare indipendenza ... nel biennio
- Interdisciplinarietà ...
- Uso di software ..

Spazi euclidei

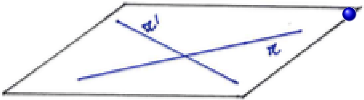
Uniamo ora la struttura euclidea e quella affine ...

... e cerchiamo di sfruttare il più possibile tale struttura!!!

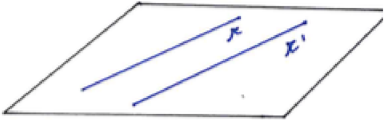
Posizione reciproca di due rette in $\mathbb{E}^3$

Due rette *r* ed *s* nello spazio possono essere

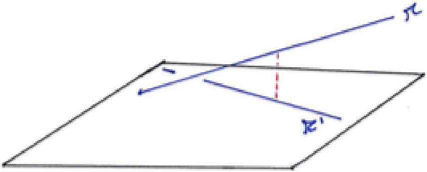
- **Complanari**
  - *Incidenti*



  - *Parallele*



- **Sghembe**



Si osservi che se $r = s$ allora il piano che le contiene non è unico.

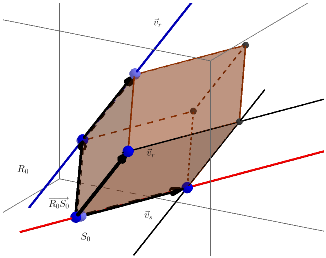
Interpretazione geometrica della complanerietà e dell'essere sghembe tra due rette in $\mathbb{E}^3$

Siano $r: \ R = R_0 + \langle \vec{v}_r \rangle$ e s $S = S_0 + \langle \vec{v}_s \rangle$ due rette in $\mathbb{E}^3$. Dalla definizione esse sono sghembe sse

$$\vec{v}_r, \ \vec{v}_s, \ \overrightarrow{R_0 S_0} \quad \text{sono linermente indipendenti,}$$

cioè sse il parallelepipedo generato da $\vec{v}_r, \ \vec{v}_s, \ \overrightarrow{R_0 S_0}$ ha volume non nullo:

$$\det \left[\mathrm{Col}(\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{R_0 S_0}) \right] \neq 0$$

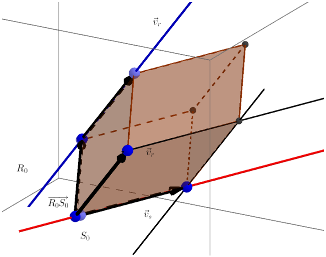


Interpretazione geometrica della complanerietà e dell'essere sghembe tra due rette in $\mathbb{E}^3$

N.B.

Ulteriore condizione che garantisce la comlanarietà tra due rette e cioè due rette r ed s:

$$\det\left[\mathrm{Col}(\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{R_0S_0})\right] = 0\,.$$



Cioè se il parallelepipedo generato da $v_r,\ v_s,\ \overrightarrow{R_0S_0}$ degenera in una figura piana.

Distanza punto-piano

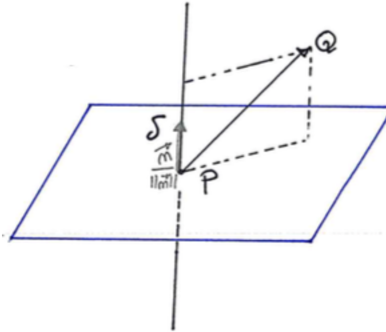
- Distanza tra due punti P e Q: $\mathrm{dist}(P;Q) = ||\overrightarrow{PQ}||$.

- Distanza punto-piano: $Q: \ (x_1, y_1, z_1)$, $\pi: \ ax + by + cz = d$. Sia $P\ (x_0, y_0, z_0) \in \pi$.

$\mathrm{dist}(Q\ \pi) = \delta =$ proiezione ortonormale di $\overrightarrow{PQ}$ sulla retta perpendicolare a π per P.

$$\mathrm{dist}(Q\ \pi) = \frac{|\langle \vec{n} \mid \overrightarrow{PQ}|}{||\vec{n}||}$$

$$= \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$



Distanza punto-retta

Siano r retta per P e di direzione $\vec{v}_r$ e Q un punto dello spazio, allora

$$\mathrm{dist}(P;\ r) = \frac{||\overrightarrow{PQ} \times \vec{v}_r||}{||\vec{v}_r||}$$

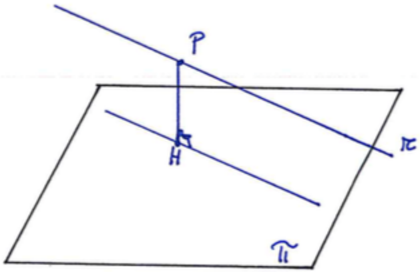
cioè la distanza cercata è data dalla lunghezza della proiezione ortogonale di $\overrightarrow{PQ}$ su $\vec{v}_r$ (applicato in P).

N.B.

Ciò fornisce anche la nozione di distanza tra due rette parallele!!!

Distanza retta-piano

Sia r una retta, π un piano parallelo a r e P un punto qualsiasi di r, allora



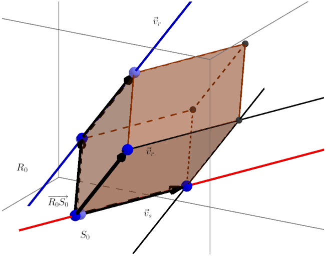
cioè

$$\mathrm{dist}(r\ \pi) = ||\overrightarrow{PH}||$$

con H proiezione ortogonale di P su π.

Distanza tre due rette sghembe

Siano $r: \; R = R_0 + \langle v_r \rangle$ e $s: \; S = S_0 + \langle v_s \rangle$ due rette sghembe in $\mathbb{E}^3$. Allora la distanza tra le due rette è l'altezza del parallelepipedo generato da $\overrightarrow{R_0 S_0}$, $\vec{v}_r$ e $\vec{v}_s$:



$$\mathrm{dist}(r; s) = \frac{\left| \langle \overrightarrow{R_0 S_0} | \vec{v}_r \times \vec{v}_s \rangle \right|}{\| \vec{v}_r \times \vec{v}_s \|}.$$

N.B.

Si noti che stiamo usando l'idea della distanza punto–piano e che la distanza tra due rette è zero se e solo se il parallelepipedo degenera cioè se e solo se le due rette (non parallele) sono incidenti.

Interpretazione geometrica del determinante 2×2 ...

Senza usare il prodotto vettoriale e senza dirlo immergere tutto in $\mathbb{E}^3$!!!

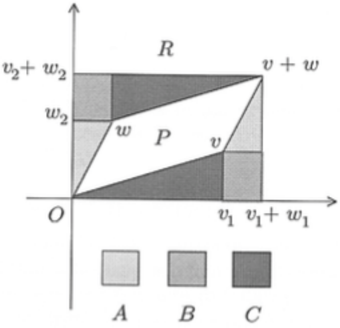


Figura 9.1 Il determinante come area orientata.

$$\text{Area}(P) = \text{Area}(R) - 2\text{Area}(A) - 2\text{Area})B - 2\text{Area}(C)$$

Nei quesiti ...

Simulazione della seconda prova di matematica per gli esami di stato liceo scientifico
a.s. 2015-2016 - 10 dicembre 2015
Lo studente deve svolgere un solo problema a sua scelta e 5 quesiti a sua scelta
Tempo massimo assegnato alla prova sei ore

3. Determinare un'espressione analitica della retta perpendicolare nel punto [1,1,1] al piano di equazione $2x-3y+z=0$.

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

M557 – ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE

Indirizzi: LI02, EA02 – SCIENTIFICO

LI03, EA09 - SCIENTIFICO - OPZIONE SCIENZE APPLICATE

(Testo valevole anche per la corrispondente sperimentazione quadriennale)

Tema di: MATEMATICA

4. In un sistema di riferimento cartesiano nello spazio $Oxyz$ sono dati i punti $A\ (-3, 4, 0)$ e $C\ (-2, 1, 2)$. I tre punti O, A e C giacciono su un piano E. Determinare l'equazione che descrive il piano E.

Nei quesiti ...

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

M557 – ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE

Indirizzi: LI02, EA02 – SCIENTIFICO

LI03, EA09 - SCIENTIFICO - OPZIONE SCIENZE APPLICATE

(Testo valevole anche per la corrispondente sperimentazione quadriennale)

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.

5. Determinare un'espressione analitica della retta perpendicolare nell'origine al piano di equazione $x + y - z = 0$.

Nei quesiti ...

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca
M557 – ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE

Indirizzi: LI02, EA02 – SCIENTIFICO
LI03, EA09 - SCIENTIFICO - OPZIONE SCIENZE APPLICATE
(Testo valevole anche per la corrispondente sperimentazione quadriennale)

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.

4. Nello spazio sono dati due piani α e β rispettivamente di equazione:

$$\alpha)\; x - 3y + z - 5 = 0$$

$$\beta)\; x + 2y - z + 3 = 0$$

Dopo aver determinato l'equazione parametrica della retta r da essi individuata verificare che essa appartiene al piano γ di equazione $3x + y - z + 1 = 0$.

9. In un riferimento cartesiano nello spazio $Oxyz$, data la retta r di equazioni:

$$\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 1 + t \\ z = kt \end{cases}$$

e il piano P di equazione:

$$x + 2y - z + 2 = 0,$$

determinare per quale valore di k la retta r e il piano P sono paralleli, e la distanza tra di essi.

Alcuni problemi ... più complessi

Problema 1

Si consideri la retta $\tau : \quad y = -x + 1$ *e il triangolo* $\mathcal{T}$ *di vertici* $A : (1; 1)$, $B : (4; 0)$ *e* $C : (3; 5)$. *Si determini il simmetrico di* $\mathcal{T}$ *rispetto a* τ *nella direzione ortogonale a* τ. *Si scriva poi la rappresentazione associata (matriciale) a tale trasformazione affine.*

Problema 2

Si consideri la retta $\tau : \quad y = 2x + 1$ *e il triangolo* $\mathcal{T}$ *di vertici* $A : (1; -1)$, $B : (3; 1)$ *e* $C : (4; -1)$. *Si determini il simmetrico di* $\mathcal{T}$ *rispetto a* τ *nella direzione generata da* $\langle \vec{w} = [1 \quad -2]^T \rangle$. *Si scriva poi la rappresentazione associata (matriciale) a tale trasformazione affine.*

Per iniziare ...

Problema 3

1. *Scrivere l'equazione cartesiana del piano* π *passante per i punti* $P_0 : (-1; -1; 2)$, $P_1 : (0; 0; 2)$ *e* $P_2(0; -1; 3)$.
2. *La retta*
$$\begin{cases} x = -1 \\ y = \lambda \qquad\qquad \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases}$$
è contenuta, interseca o è parallela a π*?*
3. *Gli spazi direttori di* r *e* π *sono linearmente indipendenti?*

Alcuni problemi ... più complessi

Problema 4

1. *Scrivere l'equazione cartesiana del piano* π *contenente la retta*

$$\begin{cases} x = -\lambda \\ y = 1 \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ z = -\lambda \end{cases}$$

   e passante per il punto $P : (1; 1; -1)$
2. *Determinare la retta* s *passante per* P *e per* $S : (2; -1; 1)$.
3. *Determinare il simmetrico* S' *di* S *rispetto a* π *nella direzione di* $\langle \vec{[2 \quad -1 \quad 0]^T} \rangle$.
4. *Determinare il simmetrico* s' *della retta* s *rispetto a* π *nella direzione di* $\langle \vec{[2 \quad -1 \quad 0]^T} \rangle$.
5. *Determinare la proiezione* s'' *della retta* s *su* π *nella direzione di* $\langle \vec{[2 \quad -1 \quad 0]^T} \rangle$.

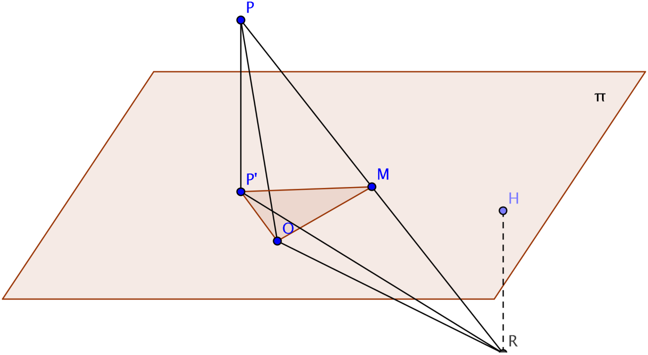
Alcuni problemi ... più complessi

Problema 5

Nello spazio euclideo reale $\mathbb{E}^3$ in cui sia fissato un sistema di riferimento cartesiano si considerino il punto $P : (0,0,1)$ e il piano $\pi : \quad 2z - x = 0$.

1. *Determinare la proiezione ortogonale P' a P su π.*
2. *Determinare la proiezione M di P su π lungo la direzione $V = \langle \vec{v} = [1 \quad 1 \quad -1]^T \rangle$.*
3. *Calcolare l'area del triangolo $OP'M$, in cui O è l'origine del sistema di riferimento.*
4. *Detto R il simmentrico di P rispetto a π lungo V, determinare il volume del tetraedro $OPRP'$.*

Alcuni problemi … più complessi



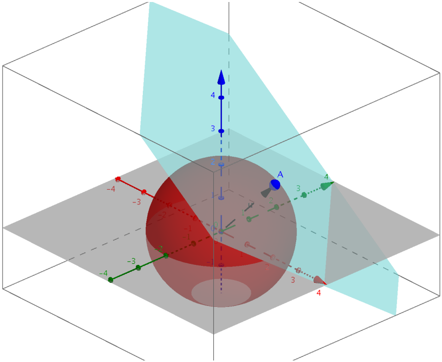
Per completezza con le indicazioni nazionali

Problema 5

Determinare il piano tangente la sfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

nel punto $(1; 1; \sqrt{2})$.



Commenti finali

MANY THANKS FOR YOUR ATTENTION !!!