Geometria Affine ed Euclidea dello Spazio

Nicola Sansonetto
Istituto Sanmicheli di Verona

1 Aprile 2016 - Dipartimento di Informatica, Università degliStudi di Verona

AFFINE???

Linee guida del seminario

1. La geometria affine dello spazio
   - Nelle indicazioni nazionali
   - Nell'esame di stato e nelle simulazioni
   - Nei libri di testo
2. Costruzione dello spazio vettoriale geometrico
3. Struttura Affine
   - Equazioni parametriche
   - Struttura euclidea e alcune significative conseguenze
   - Posizione reciproca di sottospazi affini in $\mathbb{E}^3$
   - Nozioni Metriche
4. Commenti finali

Nei quesiti ...

Simulazione della seconda prova di matematica per gli esami di stato liceo scientifico
a.s. 2015-2016 - 10 dicembre 2015
Lo studente deve svolgere un solo problema a sua scelta e 5 quesiti a sua scelta
Tempo massimo assegnato alla prova sei ore

3. Determinare un'espressione analitica della retta perpendicolare nel punto [1,1,1] al piano di equazione $2x-3y+z=0$.

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

M557 – ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE

Indirizzi: LI02, EA02 – SCIENTIFICO

LI03, EA09 - SCIENTIFICO - OPZIONE SCIENZE APPLICATE

(Testo valevole anche per la corrispondente sperimentazione quadriennale)

Tema di: MATEMATICA

4. In un sistema di riferimento cartesiano nello spazio $Oxyz$ sono dati i punti $A\ (-3, 4, 0)$ e $C\ (-2, 1, 2)$. I tre punti O, A e C giacciono su un piano E. Determinare l'equazione che descrive il piano E.

Nei quesiti ...

Ministero dell' Istruzione, dell' Università e della Ricerca

M557 – ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE

Indirizzi: LI02, EA02 – SCIENTIFICO

LI03, EA09 - SCIENTIFICO - OPZIONE SCIENZE APPLICATE

(Testo valevole anche per la corrispondente sperimentazione quadriennale)

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.

5. Determinare un'espressione analitica della retta perpendicolare nell'origine al piano di equazione $x + y - z = 0$.

Nei quesiti ...

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

M557 – ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE

Indirizzi: LI02, EA02 – SCIENTIFICO

LI03, EA09 - SCIENTIFICO - OPZIONE SCIENZE APPLICATE

(Testo valevole anche per la corrispondente sperimentazione quadriennale)

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.

4. Nello spazio sono dati due piani α e β rispettivamente di equazione:

$$\alpha)\ x - 3y + z - 5 = 0$$

$$\beta)\ x + 2y - z + 3 = 0$$

Dopo aver determinato l'equazione parametrica della retta r da essi individuata verificare che essa appartiene al piano γ di equazione $3x + y - z + 1 = 0$.

9. In un riferimento cartesiano nello spazio $Oxyz$, data la retta r di equazioni:

$$\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 1 + t \\ z = kt \end{cases}$$

e il piano P di equazione:

$$x + 2y - z + 2 = 0,$$

determinare per quale valore di k la retta r e il piano P sono paralleli, e la distanza tra di essi.

Nei libri di testo ...

NO COMMENT ...

Dai segmenti orientati ai vettori

Definizione

Un segmento orientato è dato da una coppia ordinata di punti distinti, ossia un segmento su cui è scelto un ordine tra gli estremi. Un punto identifica un segmento banale.

Un segmento orientato individua:

- direzione: retta per A e B;
- verso: A precede B;
- lunghezza: una volta fissata una unità di misura. Ovviamente $|AA| = 0$.

Definizione

Due segmenti orientati AB e $A'B'$ si dicono **equipollenti**[a] *se hanno la stessa lunghezza, direzione e verso e si pone $AB \sim A'B'$. Chiamiamo vettori le classi di equipollenza di segmenti orientati.*

[a] Equipollenza è una relazione di equivalenza.

Lo spazio vettoriale geometrico

Lo spazio vettoriale geometrico è l'insieme delle classi di equipollenza

$$\mathbb{S}^{:} = \frac{\text{Segmenti orientati}}{\sim}$$

Struttura vettoriale 'geometrica': **Le operazioni di fanno tra i rappresentanti!!!**

- **Somma.** *Regolare del parallelogramma.*
- **Prodotto per scalari.** *Multiplo di un segmento orientato.*

Vettori applicati e proprietà

- **Applicare un dato vettore ad un punto** P**=** scegliere quel rappresentante avente origine in P. $\mathbb{S}_P =$ spazio (vettoriale) dei vettori applicati in P.[1]
- La lunghezza, la direzione e il verso di un vettore geometrico sono quelle di uno qualsiasi dei suoi rappresentanti.
- $\vec{0}$ = classe del segmento banale.
- Due vettori sono paralleli, opposti, etc. se sono tali due qualsiasi rappresentanti.

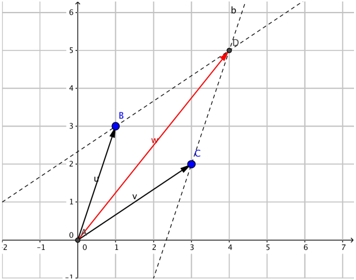
[1] Le operazioni sono quelle ovvie.

Coordinate e isomorfismo

$$\mathbb{S} \quad \cong \quad \mathbb{S}_A \quad \cong \quad \mathbb{R}^n$$

vettori geometrici — vettori applicati in A — Spazio delle coordinate

Costruzione dell'isomorfismo: scegliendo A come origine di un sistema di riferimento e associando così ad ogni vettore geometrico (applicato in A) delle coordinate: quelle dell'estremo.



N.B. Le operazioni "geometriche" diventano operazioni sulle coordinate.

Struttura euclidea

$\mathbb{R}^3$ è dotato di un prodotto scalare e di un prodotto vettoriale:

- **Prodotto scalare standard.** Siano $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ e $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ due vettori di $\mathbb{R}^3$. Allora il loro prodotto scalare (standard) è dato da:

$$\langle \vec{v} | \vec{w} \rangle = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_2 w_3 \,.$$

Proprietà del prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^3$:

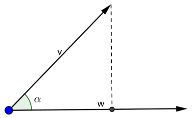
- simmetrico;
- bilineare;
- definito positivo;
- induce una nozione di distanza (lunghezza):

$$||\vec{v}||^2 = \langle \vec{v} | \vec{v} \rangle \,.$$

- *Coseno dell'angolo tra $\vec{v}$ e $\vec{w}$:*

$$\cos\alpha = \frac{||\vec{v}|| \; ||\vec{w}||}{\langle \vec{v} | \vec{w} \rangle} \,.$$

- Geometricamente: proiezione “ortogonale” di un vettore sull'altro per la lunghezza dell'altro:



Struttura euclidea

- **Prodotto vettoriale.** Siano $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ e $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ due vettori di $\mathbb{R}^3$. Allora il loro prodotto vettoriale è dato da:

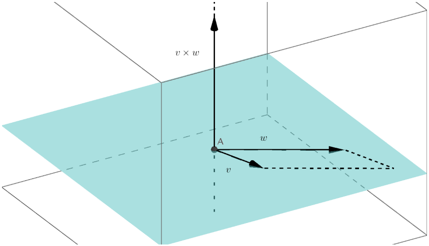
$$\vec{v} \times \vec{w} = \left(v_2 w_3 - v_3 w_2, w_1 v_3 - w_3 v_1, v_1 w_2 - v_2 w_1\right).$$

Proprietà del prodotto vettoriale di $\mathbb{R}^3$:

- antisimmetrico;
- bilineare;
- è nullo se $\vec{v}$ e $\vec{w}$ sono paralleli.

Geometricamente:

- Vettore ortogonale al sottospazio generato da $\vec{v}$ e $\vec{w}$ in modo che la matrice che ha per colonne $\vec{v}$, $\vec{w}$ e $\vec{v} \times \vec{w}$ ha determinante positivo.
- La norma di $\vec{v} \times \vec{w}$ è data da $||\vec{v}||\ ||\vec{w}||\ |\sin \alpha|$, cioè dall'area del parallelogramma che ha per lati $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

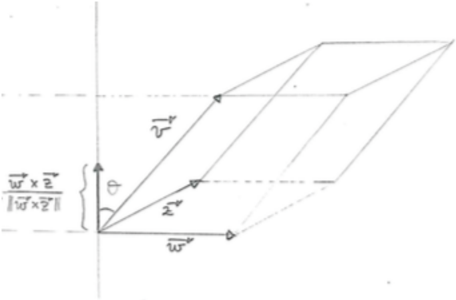


Struttura euclidea

- **Prodotto misto.** Siano $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ e $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ tre vettori di $\mathbb{R}^3$. Allora il loro prodotto misto $\langle \vec{v} | \vec{w} \times \vec{u} \rangle$ è dato da:

$$\det\left(\mathrm{Col}(\vec{v}, \vec{w}, \vec{u})\right)$$

Geometricamente:



Proprietà del prodotto misto di $\mathbb{R}^3$:

-
-

Struttura affine

L'ambiente corretto per affrontare i problemi proposti, però, **non è quello vettoriale** ma quello **affine!!!**

Definizione

Uno **spazio affine** modellato su un $\mathbb{K}$–spazio vettoriale V è una terna $(\mathbb{A}, V, +)$, in cui

- $\mathbb{A}$ è un insieme non vuoti i cui elementi sono detti **punti**;
- V è un $\mathbb{K}$–spazio vettoriale;
- $+$ è un'operazione
$$\begin{aligned} + :&\mathbb{A} \times V \longrightarrow \mathbb{A} \\ &(P, \vec{v}) \longrightarrow P + \vec{v} \end{aligned}$$

  tale che
  1. $(P + \vec{v}) + \vec{w} = P + (\vec{v} + \vec{w})$, per ogni $P \in \mathbb{A}$ e per ogni $\vec{v}, \vec{w} \in V$;
  2. per ogni coppia di punti $P, Q \in \mathbb{A}$ esiste un'unico vettore $\vec{v} \in V$ tale che
  $$Q = P + \vec{v}\,.$$
  In particolare $P + \vec{v} = P \;\Leftrightarrow\; \vec{v} = \vec{0}\;.$

Struttura affine

N.B.

*Spesso denoteremo una spazio affine semplicemente con $\mathbb{A}$. Inoltre dalla proprietà 2. della definizione precedente denota un vettore $\vec{v}$ come "***differenza di punti***":*

$$\vec{v} = Q - P$$

ma anche

$$\vec{v} = \vec{PQ}\,.$$

Definizione

Fornire un sistema di riferimento in uno spazio affine $(\mathbb{A}, V, +)$ significa fissare un punto $O \in \mathbb{A}$ detto **origine** *ed una base $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n\}$ di V. Fissato un sistema di riferimento $\mathcal{R} = \{O, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n\}$, per* **coordinate affini** *di un punto P di $\mathbb{A}$ si intende la n–upla $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ tale che $P - O = \vec{OP} = x_1\,\vec{b}_1 + \ldots + x_n\vec{b}_n$, ossia le coordinate del vettore $P - O$ rispetto alla base $\mathcal{B}$.*

Esempi fondamentali di spazi affini

- Spazio affine associato ad una spazio vettoriale
- Spazio affine standard
- Lo spazio vettoriale geometrico

Teorema

Ogni spazio affine di dimensione finita è isomorfo allo spazio affine standard.

Sottospazi affini

Definizione

Sia $(\mathbb{A}, V, +)$ *uno spazio affine e* $W \leq V$ *un sottospazio vettoriale di* V*. Una* **sottovarietà lineare** *o* **sottospazio affine**, *passante per* $P \in \mathbb{A}$ *e di spazio direttore* W *è il sottoinsieme*

$$\mathbb{L} = P + W = \{P + \vec{w} |\ \vec{w} \in W\},$$

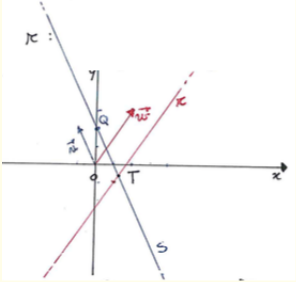
la cui dimensione coincide con quella di W*. Si pone per definizione che* $\emptyset$ *sia sottovarietà lineare di* $\mathbb{A}$ *e* $\dim \emptyset = -1$*.*

Come in ambito vettoriale: l'intersezione di due sottospazi affini è ancora un sottospazi (mentre non lo è l'unione di due sottospazi affini).

Equazioni parametriche by hands

Esempio

Consideriamo il piano affine $\mathbb{A}(\mathbb{R}^2) = \mathbb{A}^2$ dotato del riferimento canonico $\mathcal{R}\{O, \mathcal{E}\}$. Si considerino poi le sottovarietà lineari
$r: \; X = P + \langle \vec{w} \rangle = (1; -1) + \langle [2 \quad 3]^T \rangle$
e
$s: \; X = Q + \langle \vec{u} \rangle = (0; 2) + \langle [-1 \quad 2]^T \rangle$
due sottovarietà di $\mathbb{A}^2$.



Equazioni parametriche per r.

$$r: \begin{cases} X_1 = 1 + 2\alpha \\ X_2 = -1 + 3\alpha \end{cases} \longleftrightarrow X = P + \alpha \vec{w}$$

Equazione cartesiana di $r \longrightarrow$ eliminando il parametro α:

$$r: \; 3X_1 - 2X_1 - 5 = 0.$$

Analogamente per s, le cui equazioni parametriche sono

$$s: \begin{cases} X_1 = -\beta \\ X_2 = 2 + 2\beta \end{cases} \longleftrightarrow Y = P + \beta \vec{u}$$

Equazioni parametriche by hands

Esempio

Determinare le equazioni parametriche e cartesiane delle sottovarietà lineari dello spazio affine $\mathbb{A}^3$:

- del piano π passante per $P_0 = (0; 0; 1)$ e di spazio direttore $W = \langle \vec{w}_1 = [1 \quad 0 \quad -1]^T,\ \vec{w}_2 = [0 \quad 1 \quad -1]^T \rangle$;
- della retta τ per P_0 e di direzione $\vec{v} = [1 \quad 1 \quad 1]^T$.

Scriviamo le equazioni parametriche delle due sottovarietà:

$$\pi :\ P = P_0 + \langle \vec{w}_1, \vec{w}_2 \rangle = \begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = 1 - \mu - \lambda \end{cases} \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R},$$

$$r :\ R = P_0 + \langle \vec{v} \rangle = \begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha \\ z = 1 + \alpha \end{cases} \qquad \alpha \in \mathbb{R},$$

Equazioni parametriche by hands

Esempio

Equazioni cartesiane

$$\pi: \; x + y + z = 1.$$

$$r: \begin{cases} x - y = 0 \\ y - z + 1 = 0 \end{cases}$$

N.B.

- Le equazioni cartesiane, così come quelle parametriche non sono univocamente determinate.
- Osserviamo che nello spazio l'equazione di una retta in forma cartesiane si scrive come intersezione di due piani.

Spazi euclidei

Uniamo ora la struttura euclidea e quella affine ...

Definizione

Uno spazio affine $(\mathbb{A}, V, +)$ *modellato su un* $\mathbb{K}$*–spazio vettoriale* V *è detto* **spazio euclideo** *se lo spazio vettoriale* V *modellante è dotato di un prodotto scalare (cioè è uno spazio vettoriale euclideo). In tal caso* $\mathbb{A}^n(V)$ *si indica con* $\mathbb{E}^n(V)$.

... e cerchiamo di sfruttare il più possibile tale struttura!!!

Significato geometrico dei parametri di giacitura in $\mathbb{E}^3$

Equazione cartesiana di un piano in $\mathbb{E}^3$ passante per $P_0\ (x_0, y_0, z_0)$:

$$Ax + By + Cz + D = 0\,,$$

con $(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$ parametri di giacitura. Il dover passare per P_0 impone che

$$Ax_0 + By_0 + cz_0 + D = 0$$

e quindi l'equazione cartesiana si può riscrivere

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

$$\Downarrow$$

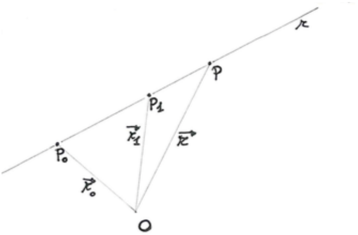
A, B, C **sono le coordinate di un vettore perperndicolare al piano**

Significato geometrico dei parametri di giacitura in $\mathbb{E}^3$

Analizzando maggiormente la situazione e ricorda che $P_0 + \vec{w}$ e $P_0 + \vec{u}$ sono punti del piano si ricava che essi sono vettori applicati contenuti nel piano e quindi si ricava

$$\langle \vec{w} \times \vec{u} \mid P - P_0 \rangle = 0.$$

Retta per due punti in $\mathbb{E}^3$



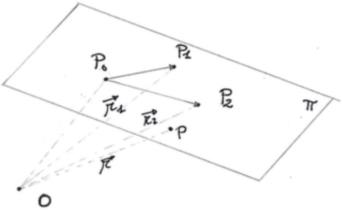
- Metodo 1. Si consideri il vettore $P_1 - P_0$ e usiamolo come vettore generatore dello spazio direttore della retta r per P_0 e P_1. Si fissi, poi, P_0 come punto origine sulla retta, da cui le equazioni parametriche della retta r : $r: \ P = P_0 + \lambda(P_1 - P_0)$, cioè in coordinate

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda(x_1 - x_0) \\ y = y_0 + \lambda(y_1 - y_0) \\ z = z_0 + \lambda(z - z_0) \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

- Metodo 2. Con riferimento alla figura l'equazione parametrica della retta r si scrive

$$\vec{r} - \vec{r}_1 = \lambda(\vec{r}_0 - \vec{r}_1)\,.$$

Piano per tre punti (non allineati) in $\mathbb{E}^3$



- Metodo 1. Scegliamo uno dei tre punti, ad esempio P_0 come punto di applicazione dei generatori dello spazio direttore del piano cercato. Siano $P_1 - P_0$ e $P_2 - P_0$ i due vettori che generano lo spazio direttore. Le equazioni parametriche sono quindi $\pi: \ P = P_0 + \lambda(P_1 - P_0) + \mu(P_2 - P_0)$ o in coordinate

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda(x_1 - x_0) + \mu(x_2 - x_0) \\ y = y_0 + \lambda(y_1 - y_0) + \mu(y_2 - y_0) \\ z = z_0 + \lambda(z - z_0) + \mu(z_2 - z_0) \end{cases} \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

- Metodo 2. Con riferimento alla figura l'equazione parametriche di π si scrive:

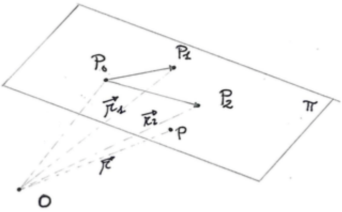
$$\vec{r} - \vec{r}_0 = \lambda(\vec{r}_1 - \vec{r}_0) + \mu(\vec{r}_2 - \vec{r}_0) \ .$$

Piano per tre punti (non allineati) in $\mathbb{E}^3$

Altri metodi???

- Metodo 3. Equazione parametrica formale di π:
$$\pi : \langle \overrightarrow{P_0P} \mid \overrightarrow{P_0P_1} \times \overrightarrow{P_0P_2} \rangle = 0 \, .$$

- Metodo 4. Condizione di complanarietà di 4 punti: P_0, P_1, P_2 e $P = (x, y, z)$ e di lineare dipendenza di tre vettori $\overrightarrow{P_0P_1}$, $\overrightarrow{P_0P_2}$ e $\overrightarrow{P_0P}$ e quindi usando il determinante o il prodotto misto ... e tutte le relative interpretazioni geometriche che volete ... (uso di software di geometria dinamica ???)



Posizione reciproca di due piani in $\mathbb{E}^3$

Due piani π e π' nello spazio si possono essere

- **incidenti**
- **coincidenti**
- **paralleli**

La posizione reciproca dipende dall'interpretazione geometrica delle soluzioni del sistema:

$$\Sigma : \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

Allora se A denota la matrice incompleta e $(A|B)$ la matrice completa del sistema Σ, per il Teorema di Rouché–Capelli:

- piani **incidenti**: il sistema Σ ammette infinite soluzioni dipendenti da un parametro $\longrightarrow \operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(A|B) = 2$;
- piani **coincidenti**: il sistema Σ ammette infinite soluzioni dipendenti da due parametri $\longrightarrow \operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(A|B) = 1$;
- piani **paralleli**: il sistema Σ non ammette soluzioni $\longrightarrow$ $\operatorname{rank} A < \operatorname{rank}(A|B) = 2$.

Posizione reciproca di tre piani in $\mathbb{E}^3$

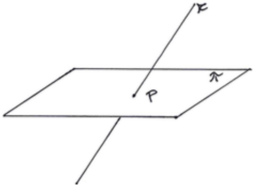
La posizione di tre piani $\pi : \; ax + by + cz + d = 0$, $\pi' : \; a'x + b'y + c'z + d' = 0$ e $\pi'' : \; a''x + b''y + c''z + d'' = 0$ nello spazio è data dall'interpretazione geometrica delle soluzioni del sistema lineare

$$\Sigma : \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \\ \\ a''x + b''y + c''z + d'' = 0 \end{cases}$$

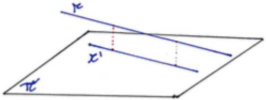
- Piani **incidenti**:
  - **in una retta:** il sistema Σ ammette infinite soluzioni dipendenti da un parametro $\longrightarrow \mathrm{rank} A = \mathrm{rank}(A|B) = 2$;
  - **in un punto:** il sistema Σ ammette un'unica soluzione $\longrightarrow \mathrm{rank} A = \mathrm{rank}(A|B) = 3$;
- piani **coincidenti**: il sistema Σ ammette infinite soluzioni dipendenti da due parametri $\longrightarrow \mathrm{rank} A = \mathrm{rank}(A|B) = 1$;
- piani $\pi \cap \pi' \cap \pi'' = \emptyset$: il sistema Σ non ammette soluzioni $\longrightarrow \mathrm{rank} A < \mathrm{rank}(A|B) = 2$.

Posizione reciproca di una retta e un piano in $\mathbb{E}^3$

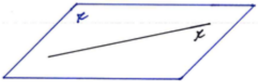
- **Incidenti in un punto**: $r \cap \pi = P$: il sistema lineare associato ammette un'unica soluzione.



- **paralleli**: $r \cap \pi = \emptyset$: il sistema lineare associato non ammette soluzioni.



- **la retta è contenuta nel piano**: $r \subset \pi$: il sistema lineare associato ammette infinite soluzioni dipendenti da un parametro.



Interpretazione geometrica del parallelismo retta - piano in $\mathbb{E}^3$

Siano $r:\ R = R_0 + \langle \vec{a} \rangle$ una retta e $\pi:\ P = P_0 + \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$ in $\mathbb{E}^3$.

- Metodo 1. Dalla definizione r è parallela a π se lo spazio direttore di una è contenuto in quello dell'altra o viceversa. Cioè se il vettore direttore di r è linearmente dipendente dai generatori dello spazio direttore di π

$$\det\left[\mathrm{Col}(\vec{a}, \vec{v}, \vec{w})\right] = \mathrm{vol}(\vec{a}, \vec{v}, \vec{w}) = 0\ .$$

- Metodo 2. Se π ha equazione cartesiana $\pi:\ ax + by + cz + d = 0$, r e π sono paralleli se e solo se il vettore direttore $\vec{a}$ di r è perpendicolare ad un vettore normale al piano π:

$$\langle \vec{a} \mid \vec{n}_\pi \rangle = 0\ ,$$

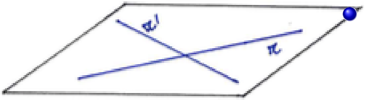
in cui $\vec{n}_\pi = [a \quad b \quad c]^T$

- Metodo 3. Usando i fasci di piani, è sufficiente determinare il piano del fascio generato da r che è parallelo a π.

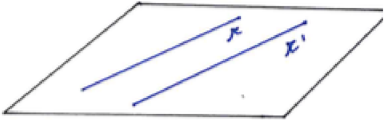
Posizione reciproca di due rette in $\mathbb{E}^3$

Due rette r ed s nello spazio possono essere

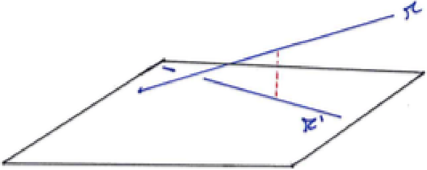
- **Complanari**
  - *Incidenti*



  - *Parallele*



- **Sghembe**



Si osservi che se $r = s$ allora il piano che le contiene non è unico.

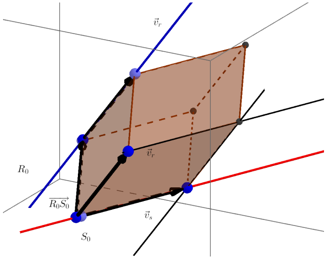
Interpretazione geometrica della complanerietà e dell'essere sghembe tra due rette in $\mathbb{E}^3$

Siano $r: \; R = R_0 + \langle \vec{v}_r \rangle$ e s $S = S_0 + \langle \vec{v}_s \rangle$ due rette in $\mathbb{E}^3$. Dalla definizione esse sono sghembe sse

$$\vec{v}_r, \; \vec{v}_s, \; \overrightarrow{R_0 S_0} \quad \text{sono linermente indipendenti,}$$

cioè sse il parallelepipedo generato da $\vec{v}_r, \; \vec{v}_s, \; \overrightarrow{R_0 S_0}$ ha volume non nullo:

$$\det\left[\mathrm{Col}(\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{R_0 S_0})\right] \neq 0$$

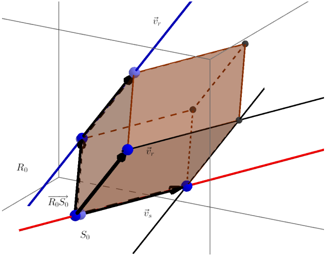


Interpretazione geometrica della complanerietà e dell'essere sghembe tra due rette in $\mathbb{E}^3$

N.B.

Ulteriore condizione che garantisce la comlanarietà tra due rette e cioè due rette r ed s:

$$\det\left[\mathrm{Col}(\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{R_0 S_0})\right] = 0\,.$$



Cioè se il parallelepipedo generato da $v_r,\ v_s,\ \overrightarrow{R_0 S_0}$ degenera in una figura piana.

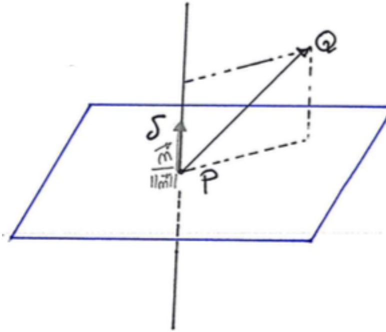
Distanza punto-piano

- Distanza tra due punti P e Q: $\mathrm{dist}(P; Q) = ||\overrightarrow{PQ}||$.
- Distanza punto-piano: $Q: \ (x_1, y_1, z_1)$, $\pi: \ ax + by + cz + d = 0$. Sia $P\ (x_0, y_0, z_0) \in \pi$.

$\mathrm{dist}(Q\ \pi) = \delta =$ proiezione ortonormale di $\overrightarrow{PQ}$ sulla retta perpendicolare a π per P.

$$\mathrm{dist}(Q\ \pi) = \frac{|\langle \vec{n} \mid \overrightarrow{PQ}|}{||\vec{n}||}$$

$$= \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$



Distanza punto-piano

Q. Come ottenere in altro metodo la proiezione δ?

Distanza punto-retta

Siano r retta per P e di direzione $\vec{v}_r$ e Q un punto dello spazio, allora

$$\mathrm{dist}(P;\ r) = \frac{||\overrightarrow{PQ} \times \vec{v}_r||}{||\vec{v}_r||}$$

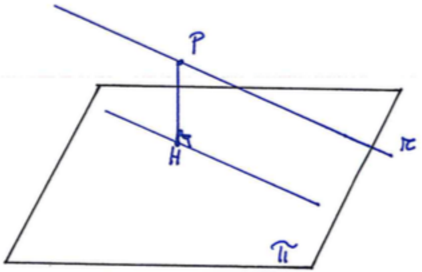
cioè la distanza cercata è data dalla lunghezza della proiezione ortogonale di $\overrightarrow{PQ}$ su $\vec{v}_r$ (applicato in P).

N.B.

Ciò fornisce anche la nozione di distanza tra due rette parallele!!!

Distanza retta-piano

Sia r una retta, π un piano parallelo a r e P un punto qualsiasi di r, allora



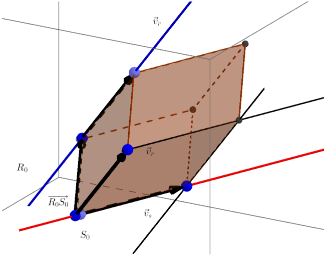
cioè

$$\mathrm{dist}(r\ \pi) = ||\overrightarrow{PH}||$$

con H proiezione ortogonale di P su π.

Distanza tre due rette sghembe

Siano $r: \ R = R_0 + \langle v_r \rangle$ e $s: \ S = S_0 + \langle v_s \rangle$ due rette sghembe in $\mathbb{E}^3$. Allora la distanza tra le due rette è l'altezza del parallelepipedo generato da $\overrightarrow{R_0 S_0}$, $\vec{v}_r$ e $\vec{v}_s$:



$$\mathrm{dist}(r; s) = \frac{\left| \langle \overrightarrow{R_0 S_0} | \vec{v}_r \times \vec{v}_s \rangle \right|}{\| \vec{v}_r \times \vec{v}_s \|}.$$

N.B.

Si noti che stiamo usando l'idea della distanza punto–piano e che la distanza tra due rette è zero se e solo se il parallelepipedo degenera cioè se e solo se le due rette (non parallele) sono incidenti.

Commenti finali

- Innumerevoli omissis!!!
-
-
-
-
-
-

GRAZIE PER LA VOSTRA ATTENZIONE !!!