LA GEOMETRIA ANALITICA DELLO SPAZIO

CONVEGNO MATHESIS

Liceo "G. GALILEI" - Verona

Venerdì 10 Aprile 2015

Perché…

- Assenza di ogni riferimento alla geometria analitica dello spazio nel quadri di Mondrian
- La geometria analitica dello spazio è una delle novità principali previste dalle indicazioni nazionali nel riordino dei licei
- Permette di utilizzare l'algebra lineare e vettoriale
- É uno degli argomenti peggio (bis)trattati nei libri di testo

Dalle indicazioni nazionali…

PRIMO BIENNIO - algebra

[Lo studente] Studierà i concetti di vettore, di dipendenza e indipendenza lineare, di prodotto scalare e vettoriale nel piano e nello spazio nonché gli elementi del calcolo matriciale.

QUINTO ANNNO – geometria

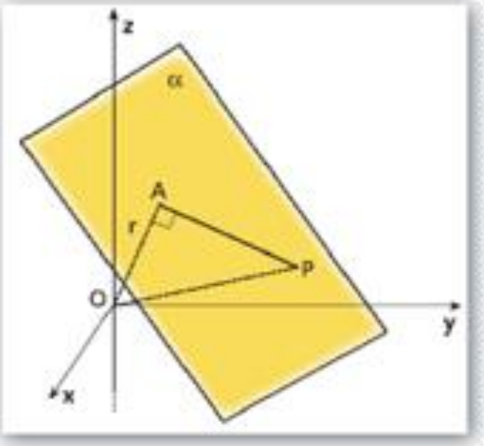
L'introduzione delle coordinate cartesiane nello spazio permetterà allo studente di studiare dal punto di vista analitico rette, piani e sfere.

Sui libri di testo...

2. IL PIANO

L'equazione generale del piano

Consideriamo un generico piano α nello spazio che non passi per l'origine O.
Tracciamo la retta r per O perpendicolare ad α e consideriamo il punto $A(a; b; c)$ in cui r interseca α (figura 3).
Prendiamo su α un punto generico $P(x; y; z)$.
Poiché $OA \perp \alpha$, allora $OA \perp AP$, quindi il triangolo OAP è rettangolo.
Applichiamo il teorema di Pitagora:



$$\overline{PO}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{AP}^2 \to$$

$$\to x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + b^2 + c^2 + (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 \to$$

$$\to x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + b^2 + c^2 + x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 + z^2 +$$

$$- 2cz + c^2 \to ax + by + cz - (a^2 + b^2 + c^2) = 0.$$

Poniamo $-(a^2 + b^2 + c^2) = d$ e otteniamo l'equazione del piano α:

$$ax + by + cz + d = 0.$$

In generale si può dimostrare che ogni equazione $\boldsymbol{ax + by + cz + d = 0}$, con a, b, c non tutti nulli, rappresenta un piano e viceversa.
L'equazione viene detta **equazione generale del piano**.
In particolare, l'equazione $ax + by + cz = 0$ rappresenta un piano passante per l'origine.

Sui libri di testo...

TEOREMA

Condizione di parallelismo fra piani

Due piani di equazioni $ax + by + cz + d = 0$ e $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ sono paralleli se:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}.$$

TEOREMA

Condizione di perpendicolarità fra piani

Due piani di equazioni $ax + by + cz + d = 0$ e $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ sono perpendicolari se:

$$aa' + bb' + cc' = 0.$$

Sui libri di testo...

La retta passante per due punti

Siano dati i punti $P(x; y; z)$, $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$. È possibile dimostrare che, se le coordinate verificano le condizioni

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}\text{, ossia }\begin{cases}\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}\\[2ex]\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}\end{cases},$$

allora P, A, B sono allineati. Tali relazioni si dicono **condizioni di allineamento** di tre punti.

Se P è un punto variabile, tali equazioni rappresentano la **retta passante per due punti** A e B.

Sui libri di testo...

Le equazioni frazionarie e le equazioni parametriche

Se poniamo $x_2 - x_1 = l$, $y_2 - y_1 = m$, $z_2 - z_1 = n$, le precedenti equazioni assumono la seguente forma:

$$\boxed{\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n},} \quad \text{o anche} \quad \begin{cases} \dfrac{x - x_1}{l} = \dfrac{y - y_1}{m} \\ \dfrac{y - y_1}{m} = \dfrac{z - z_1}{n} \end{cases}$$

Le equazioni frazionarie possono essere ulteriormente trasformate osservando che, considerando una retta e un suo punto $P(x; y; z)$, i rapporti

$$\frac{x - x_1}{l}, \quad \frac{y - y_1}{m}, \quad \frac{z - z_1}{n}$$

sono uguali fra loro, ma il loro valore cambia al variare del punto P sulla retta. Se indichiamo con t il valore comune dei tre rapporti, le equazioni frazionarie si possono riscrivere nella seguente forma:

$$\begin{cases} \dfrac{x - x_1}{l} = t \\ \dfrac{y - y_1}{m} = t \\ \dfrac{z - z_1}{n} = t \end{cases} \rightarrow \boxed{\begin{cases} x = x_1 + lt \\ y = y_1 + mt, \quad \text{con } t \in \mathbb{R}. \\ z = z_1 + nt \end{cases}}$$

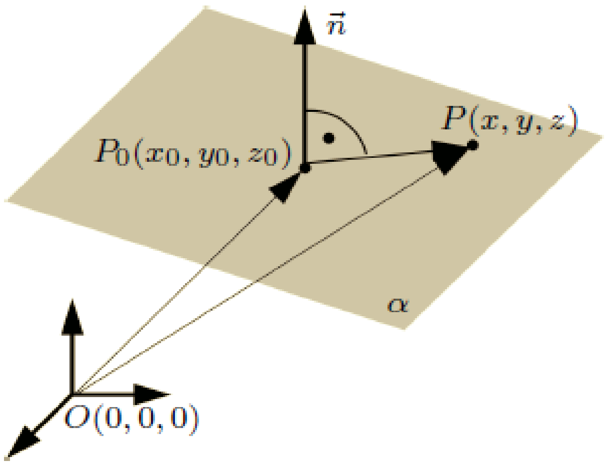
Queste sono le **equazioni parametriche** della retta; anch'esse rappresentano la retta passante per un punto dato e con coefficienti direttivi assegnati. Rimangono valide anche se uno dei coefficienti direttivi è nullo. In particolare:

Prerequisiti

- Saper operare con le matrici (quadrate di ordine 3)
- Saper operare con i vettori in componenti cartesiane
- Conoscere condizione di dipendenza lineare di un insieme di vettori
- Prodotto scalare e vettoriale di due vettori

Equazione cartesiana di un piano

Un piano è definito in modo univoco da un punto $P(x_0, y_0, z_0)$ e da una ***direzione*** individuata (non in modo univoco) dal vettore $\vec{\boldsymbol{n}}=(a,b,c)$



$P(x, y, z)$ appartiene al piano se il vettore $\overrightarrow{P_0P}$ è ortogonale a $\vec{\boldsymbol{n}}$, $\overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{\boldsymbol{n}} = 0$

$(x - x_0, y - y_0, z - z_0)(a, b, c)=0$, $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$

$$\boldsymbol{a\,x + b\,y + c\,z + d = 0} \text{ con } d = -ax_0 - by_0 - cz_0$$

Piani paralleli e piani ortogonali

Dati due piani di equazioni

$$\boldsymbol{a\,x + b\,y + c\,z + d = 0} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{a'\,x + b'\,y + c'\,z + d' = 0}$$

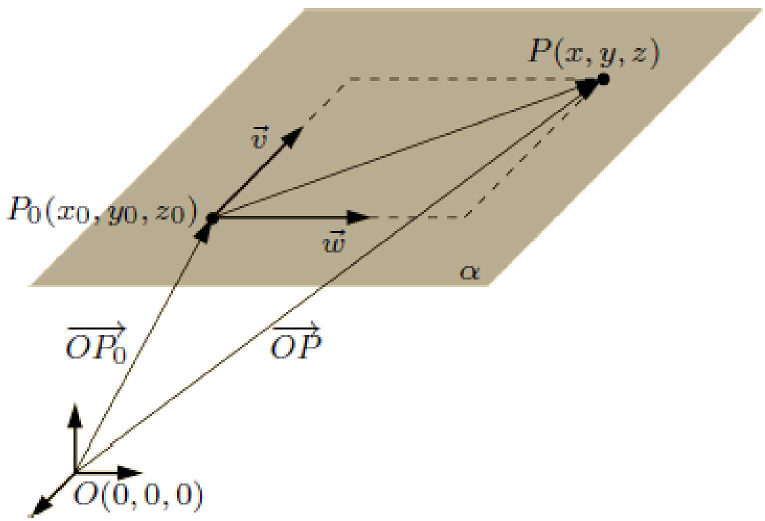
sono paralleli se i vettori direzione sono proporzionali

$$(a', b', c') = t(a, b, c) \quad , \qquad \frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$$

sono ortogonali se i vettori direzione sono ortogonali

$$(a', b', c') \cdot (a, b, c) = 0 \quad , \quad a'a + b'b + c'c = 0$$

Equazione parametrica di un piano



Un piano è definito in modo univoco da un punto $P(x_0, y_0, z_0)$ e da una ***coppia*** di vettori $\vec{v}, \vec{w}$ non paralleli. Un punto $P(x, y, z)$ appartiene al piano se i vettori $\overrightarrow{P_0P}$, $\vec{v}, \vec{w}$ sono ***linearmente dipendenti***, cioè se

$$\overrightarrow{P_0P} = k\vec{v} + h\vec{w}$$

Equazione parametrica di un piano

Scrivendo esplicitamente le componenti otteniamo

$$\begin{cases} x - x_0 = kv_1 + hw_1 \\ y - y_0 = kv_2 + hw_2 \\ z - z_0 = kv_3 + hw_3 \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} \boldsymbol{x = x_0 + kv_1 + hw_1} \\ \boldsymbol{y = y_0 + kv_2 + hw_2} \\ \boldsymbol{z = z_0 + kv_3 + hw_3} \end{cases}$$

che rappresenta **l'equazione parametrica** di un piano

Dall'equazione parametrica alla cartesiana

Per passare dall'equazione parametrica a quella cartesiana si può operare algebricamente sulle equazioni ricavandosi i parametri *k, h*

- **oppure** determinare il vettore direzione del piano attraverso il prodotto vettoriale $\vec{\boldsymbol{n}} = \vec{v} \times \vec{w}$ e quindi arrivare direttamente all'equazione

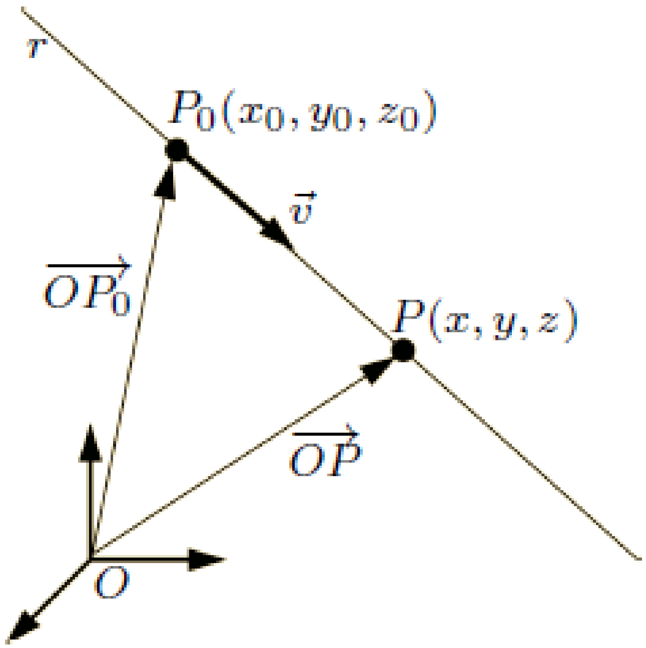
$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

- **oppure** imporre che i vettori $\overrightarrow{P_0P}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ siano linearmente dipendenti cioè

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 0$$

Equazione parametrica di una retta

Una retta nello spazio è determinata univocamente da un punto $P(x_0, y_0, z_0)$ e da una direzione fissata da un vettore (*direttore*) $\vec{\boldsymbol{v}} = (v_1, v_2, v_3)$



Un punto $P(x, y, z)$ appartiene alla retta *r* se i vettori $\overrightarrow{P_0P}$ e $\vec{v}$ sono collineari (paralleli, linearmente dipendenti) quindi se $\overrightarrow{P_0P} = \lambda\vec{v}$

Equazione parametrica di una retta

Da cui

$$\begin{cases} x - x_0 = \lambda v_1 \\ y - y_0 = \lambda v_2 \\ z - z_0 = \lambda v_3 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \boldsymbol{x = x_0 + \lambda v_1} \\ \boldsymbol{y = y_0 + \lambda v_2} \\ \boldsymbol{z = z_0 + \lambda v_3} \end{cases}$$

Retta passante per due punti

Dati i punti $A(x_A,\ y_A,\ z_A)$ e $B(x_B,\ y_B,\ z_B)$ determinare l'equazione della retta r passante per A, B

$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A,\ y_B - y_A, z_B - z_A)$ è il vettore direzione della retta *r* e quindi una possibile equazione parametrica di *r* sarà

$$\begin{cases} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x_A} + \boldsymbol{\lambda}(x_B - x_A) \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y_A} + \boldsymbol{\lambda}(y_B - y_A) \\ \boldsymbol{z} = \boldsymbol{z_A} + \boldsymbol{\lambda}(z_B - z_A) \end{cases}$$

oppure considerato un punto $P(x, y, z)$ appartiene alla retta *AB* solo se i vettori $\overrightarrow{AP}$ *e* $\overrightarrow{AB}$ sono *collineari* cioè $\overrightarrow{AP} = \lambda\ \overrightarrow{AB}$ e quindi

$$(x - x_A, y - y_A\ , z - z_A) = \lambda(x_B - x_A, y_B - y_A\ z_B - z_A)$$

$$\boldsymbol{\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{z - z_A}{z_B - z_A}}$$

Piano passante per tre punti

Dati tre punti non allineati $A(x_A,\ y_A,\ z_A)$ *B*$(x_B,\ y_B,\ z_B)$ *C*$(x_C,\ y_C,\ z_C)$ *determina l'equazione (cartesiana) del piano da essi individuato*

Un punto $P(x, y, z)$ appartiene al piano se e solo se i vettori $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ sono **linearmente dipendenti**, se e solo se

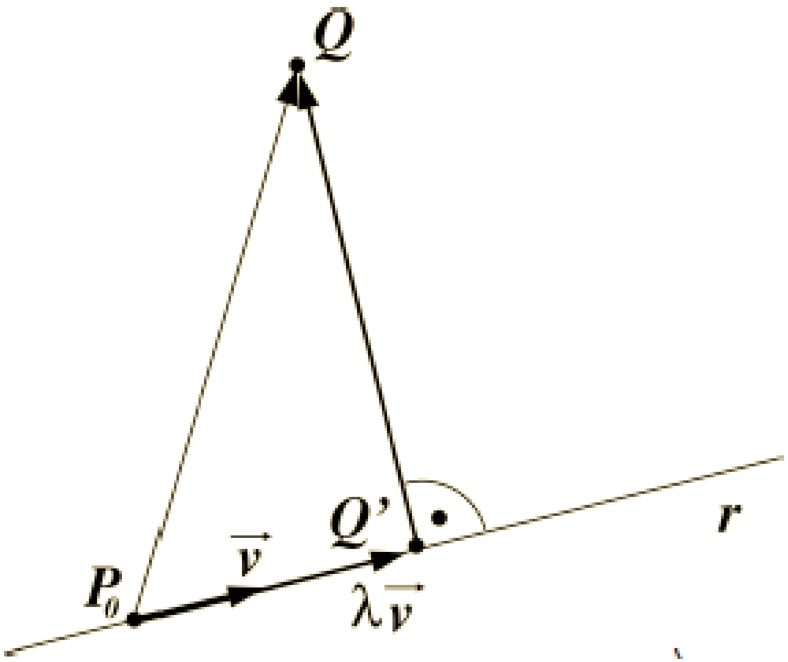
$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{x - x_A} & \boldsymbol{y - y_A} & \boldsymbol{z - z_A} \\ \boldsymbol{x_B - x_A} & \boldsymbol{y_B - y_A} & \boldsymbol{z_B - z_A} \\ \boldsymbol{x_C - x_A} & \boldsymbol{y_C - y_A} & \boldsymbol{z_C - z_A} \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$

Alcune tipologie di problemi semplici…

- Determinare l’equazione della retta passante per un punto assegnato e perpendicolare ad un piano dato
- Determinare l’equazione del piano parallelo o perpendicolare ad un piano dato e passante per un punto assegnato
- Determinare l’equazione di una retta passante per un punto assegnato e parallela o perpendicolare ad una retta data
- Determinare l’equazione del piano contenente una retta data e passante per un punto assegnato

…e più difficili

Dati una retta r (equazione parametrica) ed un punto $Q(x_Q, y_Q, z_Q)$ *determinare la proiezione ortogonale Q' di Q su r*



Proiezione ortogonale di un punto su una retta

Supposta la retta *r* scritta nella forma $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + \lambda\vec{v}$ $\quad r: \begin{cases} x = x_0 + \lambda v_1 \\ y = y_0 + \lambda v_2 \\ z = z_0 + \lambda v_3 \end{cases}$

dovrà essere $\overrightarrow{Q'Q} \perp \vec{v}$ quindi $\overrightarrow{Q'Q} \cdot \vec{v} = 0$ e $\overrightarrow{P_0Q'} = \lambda\,\vec{v}$ per qualche λ .

Da $\overrightarrow{P_0Q} = \overrightarrow{P_0Q'} + \overrightarrow{Q'Q}$ si ottiene $\overrightarrow{Q'Q} = \overrightarrow{P_0Q} - \overrightarrow{P_0Q'} = \overrightarrow{P_0Q} - \lambda\,\vec{v}$

quindi $\vec{v} \cdot \overrightarrow{Q'Q} = \vec{v} \cdot (\overrightarrow{P_0Q} - \lambda\,\vec{v}) = \vec{v} \cdot \overrightarrow{P_0Q} - \lambda\|v\|^2 = 0$

da cui $\lambda = \dfrac{\vec{v} \cdot \overrightarrow{P_OQ}}{\|\vec{v}\|^2}$ e $\overrightarrow{OQ'} = \overrightarrow{OP_0} + \dfrac{\vec{v} \cdot \overrightarrow{P_OQ}}{\|\vec{v}\|^2}\,\vec{v}$, vale a dire

$$\begin{bmatrix} x_{Q'} \\ y_{Q'} \\ z_{Q'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + \frac{(v_1, v_2, v_3) \cdot (x_Q - x_0, y_Q - y_0\ z_Q - z_0)}{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

Un po' di materiale

web.ticino.com/lucarovelli/appunti/3N_Cap1_Geom_Vettoriale.pd

http://www.dipmatematica.unito.it/unitoWAR/ShowBinary/FSRepo/D005/Allegati/quadernididattici/favro.pdf