L'Associazione Mathesis - Società Italiana di Scienze MM. e FF. - sezione di Verona
Il Dipartimento di Informatica dell'Università degli Studi di Verona
Il Piano Lauree Scientifiche - Università degli Studi di Verona
Il Gruppo promotore NSA - Verona

organizzano la

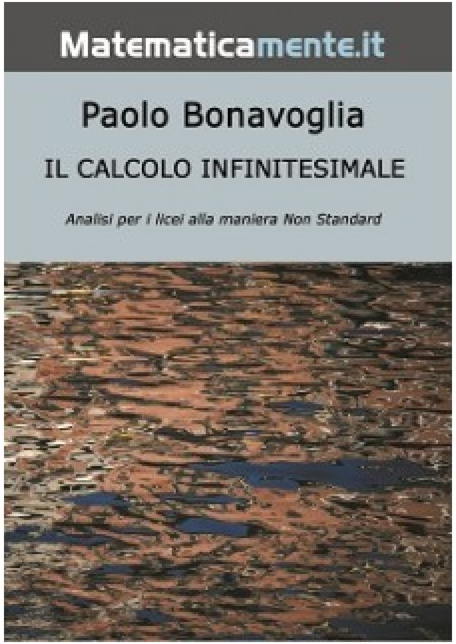
5ª Giornata Nazionale di Analisi Non Standard

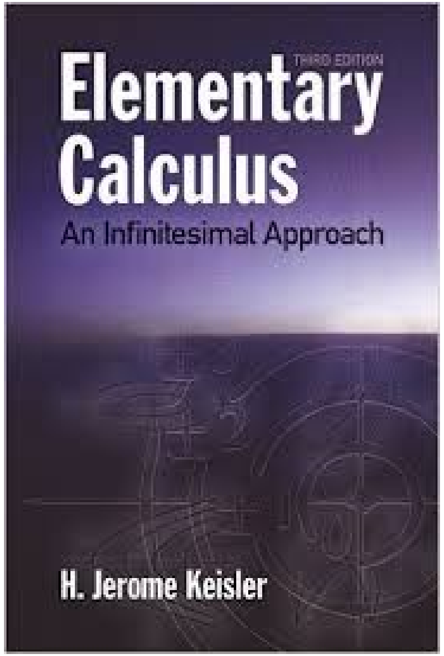
Verona, sabato 10 ottobre 2015

Lucia Rapella, ITCG P. Saraceno - Morbegno (SO)

Sui teoremi del calcolo integrale

Testi di riferimento





https://sites.google.com/site/profrapella/

dispensa

Prof.Rapella

Navigazione
- **Lezioni di matematica**
  - Algebra
  - Analisi infinitesimale
    - Calcolo differenziale
    - **Calcolo integrale**
  - Spazio
    - S1-geometria euclidea
    - S2-geometria analitica
    - S3-analisi
- **Mappa del sito**

Lezioni di matematica > Analisi infinitesimale >

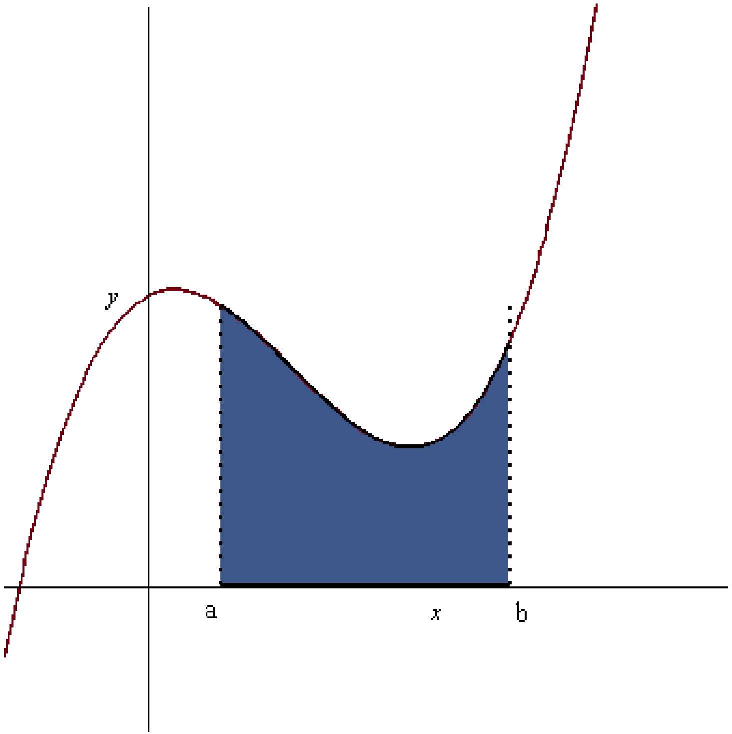
Calcolo integrale

Autore: Lucia Rapella

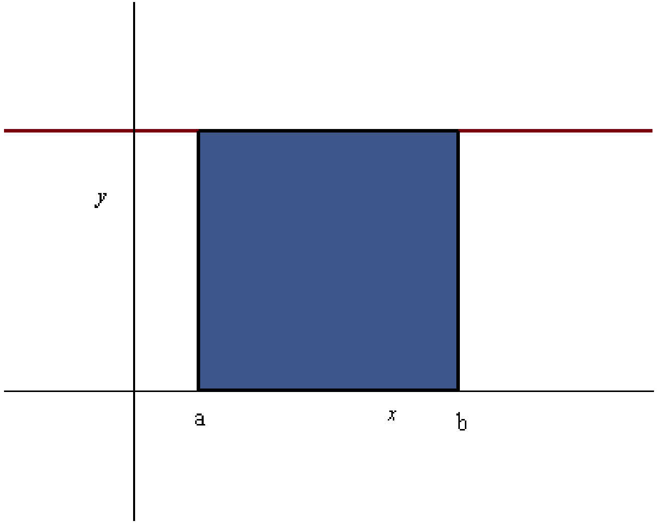
In allegato le pagine della dispensa in formato stampabile.

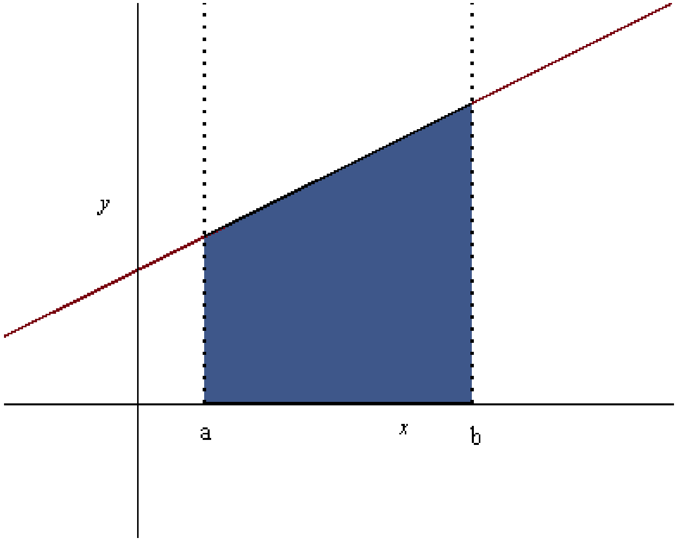
Integrali.pdf (2868k) Lucia Rapella, 21 ago 2015, 07:26

Il problema

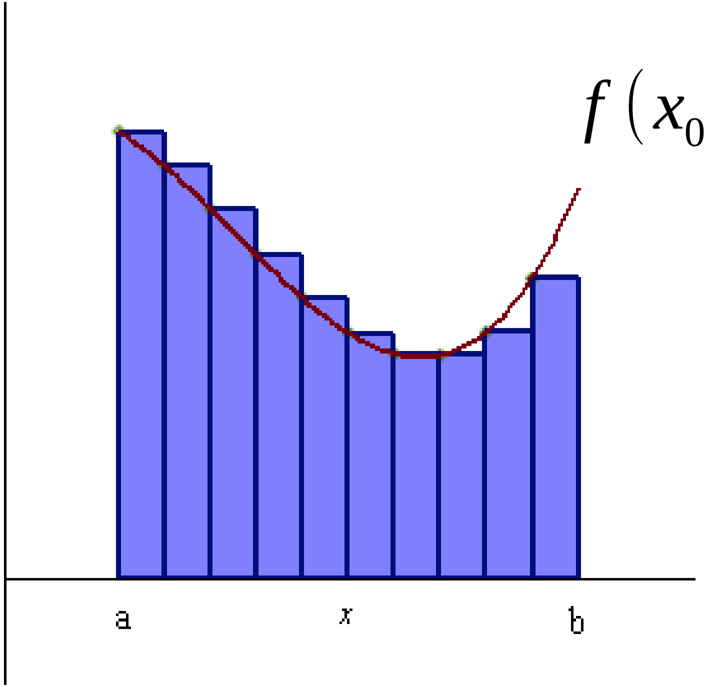


Area del rettangolo e del trapezio





somme di rettangoli



$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

$$f(x_0)\cdot\Delta x + f(x_1)\cdot\Delta x + \ldots + f(x_{n-1})\cdot\Delta x$$

$$(f(x_0) + f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1}))\cdot\Delta x$$

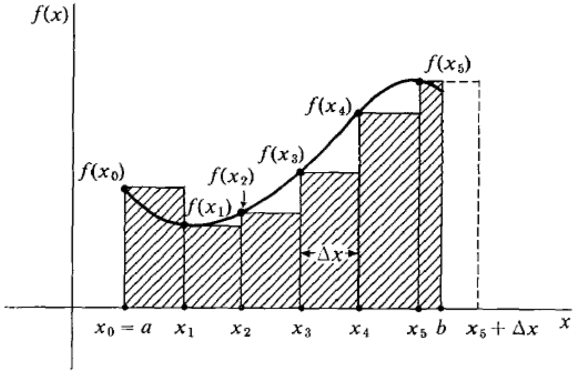
$$\sum_{i=1}^{n} f(x_{n-1})\cdot\Delta x$$

La somma di rettangoli può essere costruita anche fissando un’ampiezza Δx
e costruendo i sottointervalli come

$$[a, x_1 = a + \Delta x], [x_1, x_2 = x_1 + \Delta x], \ldots\ldots [x_n = a + n \cdot \Delta x, b]$$

Possiamo dunque definire

$$\sum_a^b f(x)\Delta x = f(x_0)\cdot\Delta x + f(x_1)\cdot\Delta x + \ldots + f(x_{n-1})\cdot\Delta x + f(x_n)(b - x_n)$$



La somma di rettangoli può essere costruita anche fissando un’ampiezza Δx
e costruendo i sottointervalli come

$$[a, x_1 = a + \Delta x], [x_1, x_2 = x_1 + \Delta x], \ldots .. [x_n = a + n \cdot \Delta x, b]$$

Possiamo dunque definire

$$\sum_a^b f(x) \Delta x = f(x_0) \cdot \Delta x + f(x_1) \cdot \Delta x + \ldots + f(x_{n-1}) \cdot \Delta x + f(x_n)(b - x_n)$$

$$S(\Delta x) = \sum_a^b f(x) \Delta x$$

Raffinando la partizione, sembra plausibile pensare che il valore trovato sia più simile al valore esatto.

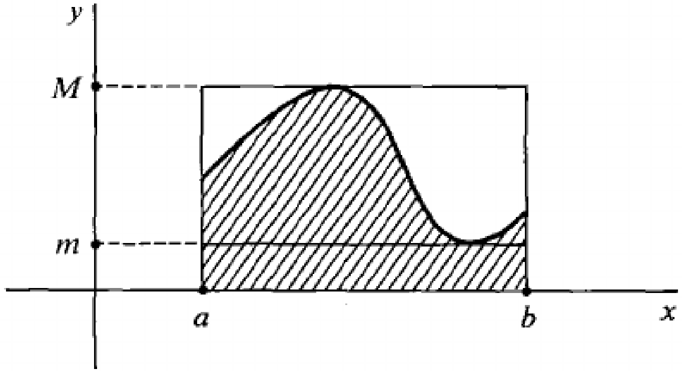
Con intervalli di lunghezza **Δx** sempre più piccoli la $S(\Delta x)=\sum_{a}^{b} f(x)\Delta x$ avrà un valore più vicino all'area cercata

Pertanto sembra naturale passare a **intervalli infinitesimi di lunghezza dx** e quindi considerare sommatorie infinite

$$S^{@}(dx)=\sum_{a}^{b} f(x)\,dx$$

$$S^{@}(dx)=\sum_a^b f(x)\,dx$$ è un numero iperreale finito

Infatti



m≤f(x)≤M

$$m\cdot(b-a)\leqslant\sum_a^b f(x)\,\Delta x\leqslant M\cdot(b-a)$$

Per trasferimento $\sum_a^b f(x)\,dx$ è finito

Possiamo definire dunque $\int_a^b f(x)\,dx=st\left(\sum_a^b f(x)\,dx\right)$

proprietà

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

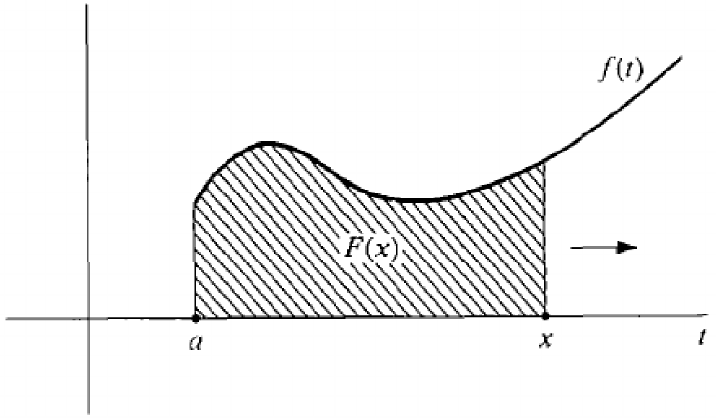
$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_a^b g(x)\,dx \qquad \text{con } f(x)=-g(x)$$

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

funzione integrale

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$$



Proprietà

- $F(x)$ è continua
- $F(a)=0$
- $$F(b)=\int_a^b f(t)\,dt$$

Più in generale:

$$\int_a^b f(t)\,dt=F(b)-F(a)$$

per ogni c per cui definisco $F(x)=\int_c^x f(t)\,dt$

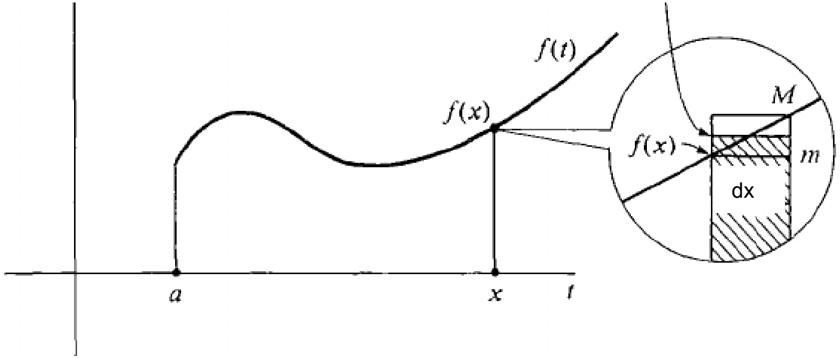
continuità di F(x)

$$F(x+dx)-F(x)=\int_a^{x+dx} f(t)\,dt-\int_a^{x} f(t)\,dt$$

$$F(x+dx)-F(x)=\int_a^{x+dx} f(t)\,dt+\int_x^{a} f(t)\,dt$$

$$F(x+dx)-F(x)=\int_x^{x+dx} f(t)\,dt$$

$$m\cdot dx\leqslant\int_x^{x+dx} f(t)\,dt\leqslant M\cdot dx$$



pertanto possiamo scrivere che $\boldsymbol{F(x+dx)-F(x)\approx f(x)\,dx}$

Teorema di Torricelli-Barrow

Calcoliamo la derivata di F(x) usando il procedimento di Leibniz:

$y = F(x)$

$y+dy = F(x+dx)$

e quindi sostituendo:

$F(x)+dy = F(x+dx)$

$dy = F(x+dx)-F(x)$

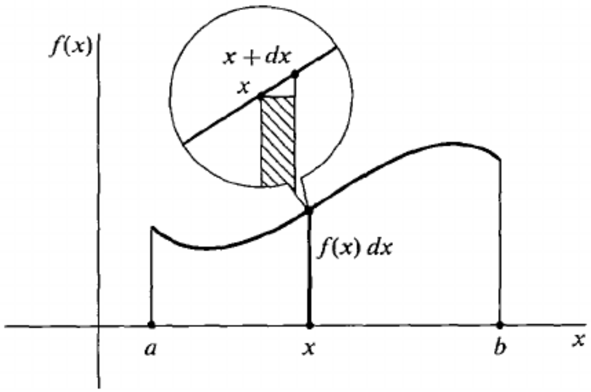
ma osservando il disegno a fianco è evidente

che la differenza $F(x+dx)-F(x) \approx f(x)\,dx$

e quindi segue che:

$dy=f(x)\,dx$

$$\frac{dy}{dx}=f(x)$$



L'Associazione Mathesis - Società Italiana di Scienze MM. e FF. - sezione di Verona
Il Dipartimento di Informatica dell'Università degli Studi di Verona
Il Piano Lauree Scientifiche - Università degli Studi di Verona
Il Gruppo promotore NSA - Verona

organizzano la

5ª Giornata Nazionale di Analisi Non Standard

Verona, sabato 10 ottobre 2015

grazie