

L'Associazione Mathesis - Società Italiana di Scienze MM. e FF. - sezione di Verona  
Il Dipartimento di Informatica dell'Università degli Studi di Verona  
Il Piano Lauree Scientifiche - Università degli Studi di Verona  
Il Gruppo promotore NSA - Verona

organizzano la

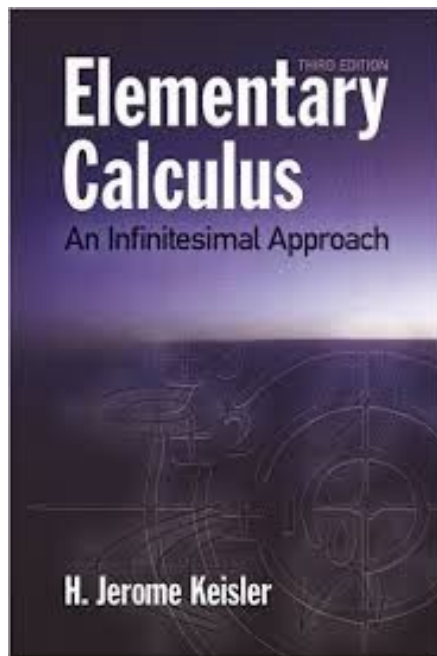
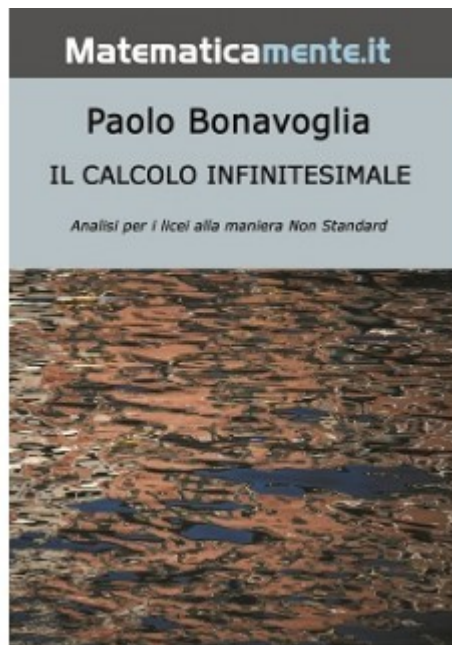
# 5<sup>a</sup> Giornata Nazionale di Analisi Non Standard

Verona, sabato 10 ottobre 2015

**Lucia Rapella**, ITCG P. Saraceno - Morbegno (SO)

*Sui teoremi del calcolo integrale*

# Testi di riferimento



<https://sites.google.com/site/profrapella/>

# dispensa

Prof. Rapella

Lezioni di matematica > Analisi infinitesimale > **Calcolo integrale**

**101-Introduzione**

**102-funzioni integrabili**

**103-proprietà**  
103-Z1-esercizi

**104-funzione integrale**

**105-teorema fondamentale del calcolo integrale**  
105-Z1-esercizi

**106-Integrali immediati**  
106-Z1-esercizi  
106-Z2-funzioni in parte positive o nulle e in parte negative  
106-Z3-area compresa tra due funzioni

**107-regole di integrazione**

**108-integrazione per sostituzione**  
[108-Z1-esercizi](#)  
108-Z2-integrazioni di funzioni razionali fratte  
108-Z3-integrale definito per sostituzione  
108-Z4-le applicazioni utilizzando anche il metodo di sostituzione

**109-integrazione per parti**  
109-Z1-esercizi  
109-Z2-integrali con radicali  
109-Z3-le applicazioni utilizzando anche l'integrazione per parti

**Navigazione**

- Lezioni di matematica
  - Algebra
  - Analisi infinitesimale
    - Calcolo differenziale
    - Calcolo integrale**
    - Spazio
      - S1-geometria euclidea
      - S2-geometria analitica
      - S3-analisi
- Mappa del sito

- 110-applicazioni**
  - I10-Z1-calcolo di aree
  - I10-Z2-teorema della media
  - I10-Z3-volume di un solido
  - I10-Z4-volume di un solido di rotazione
  - I10-Z5-lunghezza di una curva
  - I10-Z6-area di una superficie di rivoluzione

- 111-approfondimenti**
  - I11-Z1-integrali generalizzati
  - I11-Z2-integrali impossibili
  - I11-Z3-integrali con parametro

- 112-applicazioni alle altre discipline**
  - I12-Z11-applicazioni alla fisica-moto
  - I12-Z12-applicazioni alla fisica-baricentro
  - I12-Z2-applicazioni alle scienze delle costruzioni

- 113-calcolo approssimato di aree**
  - I13-Z1-metodo dei rettangoli
  - I13-Z2-metodo dei trapezi
  - I13-Z3-metodo di Cavalieri Simpson


## IZZ-Bibliografia

Quest'opera è distribuita con Licenza

[Creative Commons Attribuzione - Condividi allo stesso modo 4.0 Internazionale](#).

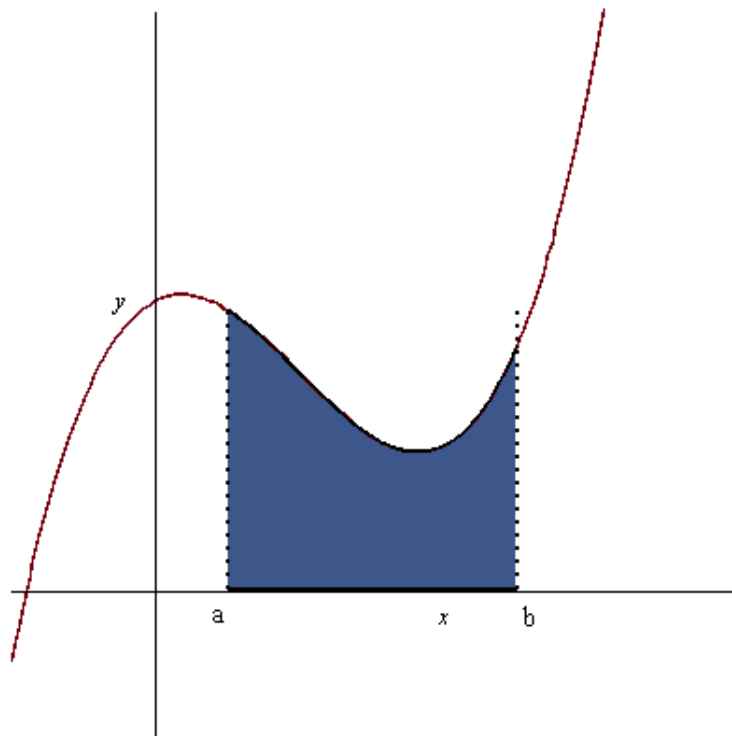
Autore: Lucia Rapella

In allegato le pagine della dispensa in formato stampabile.

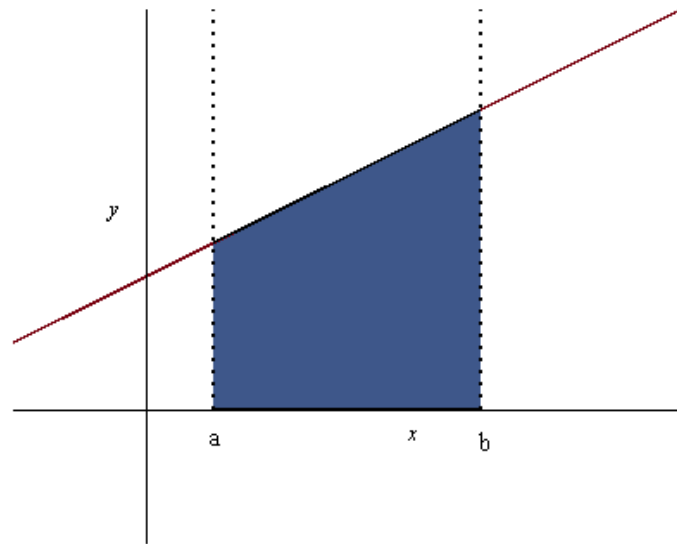
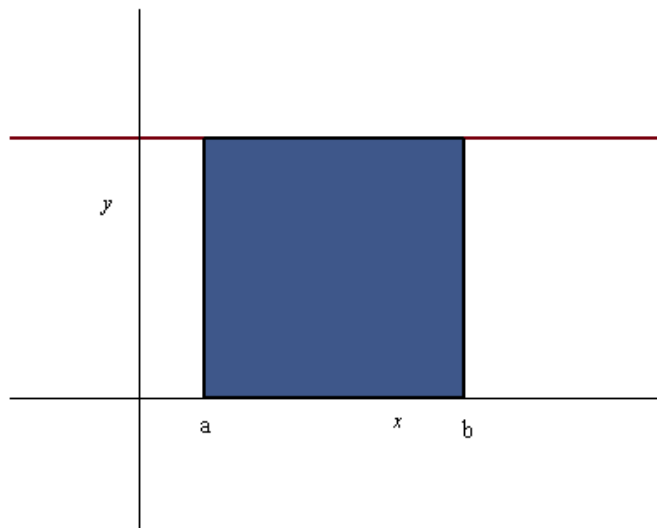
 [Integrali.pdf](#) (2868k)

Lucia Rapella, 21 ago 2015, 07:26

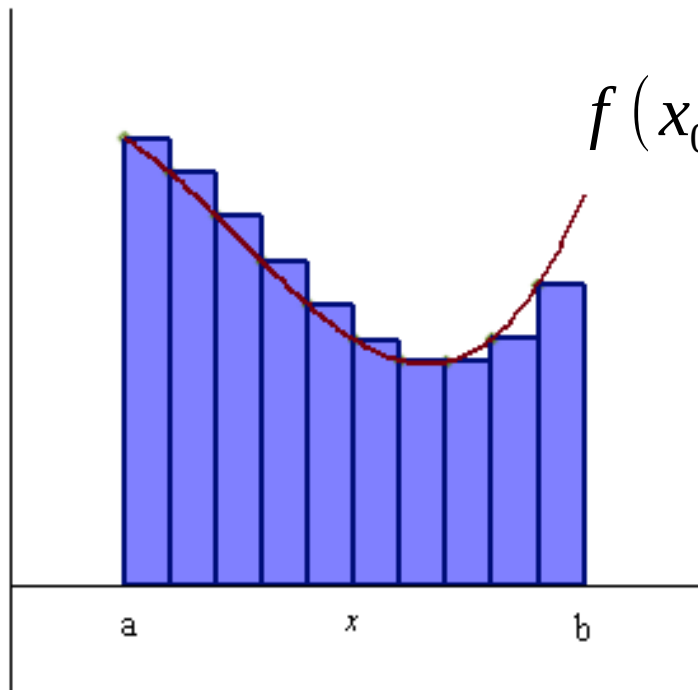
# Il problema



# Area del rettangolo e del trapezio



# somme di rettangoli



$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

$$f(x_0) \cdot \Delta x + f(x_1) \cdot \Delta x + \dots + f(x_{n-1}) \cdot \Delta x$$

$$(f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1})) \cdot \Delta x$$

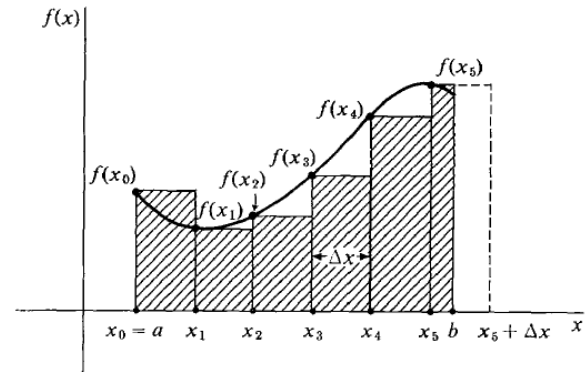
$$\sum_{i=1}^n f(x_{n-1}) \cdot \Delta x$$

La somma di rettangoli può essere costruita anche fissando un'ampiezza  $\Delta x$  e costruendo i sottointervalli come

$$[a, x_1 = a + \Delta x], [x_1, x_2 = x_1 + \Delta x], \dots, [x_n = a + n \cdot \Delta x, b]$$

Possiamo dunque definire

$$\sum_a^b f(x) \Delta x = f(x_0) \cdot \Delta x + f(x_1) \cdot \Delta x + \dots + f(x_{n-1}) \cdot \Delta x + f(x_n)(b - x_n)$$



La somma di rettangoli può essere costruita anche fissando un'ampiezza  $\Delta x$  e costruendo i sottointervalli come

$$[a, x_1 = a + \Delta x], [x_1, x_2 = x_1 + \Delta x], \dots, [x_n = a + n \cdot \Delta x, b]$$

Possiamo dunque definire

$$\sum_a^b f(x) \Delta x = f(x_0) \cdot \Delta x + f(x_1) \cdot \Delta x + \dots + f(x_{n-1}) \cdot \Delta x + f(x_n)(b - x_n)$$

$$S(\Delta x) = \sum_a^b f(x) \Delta x$$



Raffinando la partizione, sembra plausibile pensare che il valore trovato sia più simile al valore esatto.

Con intervalli di lunghezza  $\Delta x$  sempre più piccoli la  $S(\Delta x) = \sum_a^b f(x) \Delta x$  avrà un valore più vicino all'area cercata

Pertanto sembra naturale passare a **intervalli infinitesimi di lunghezza  $dx$**  e quindi considerare sommatorie infinite

$$S^{\textcircled{a}}(dx) = \sum_a^b f(x) dx$$

$$S^{\textcircled{a}}(dx) = \sum_a^b f(x) dx \quad \text{è un numero iperreale finito}$$

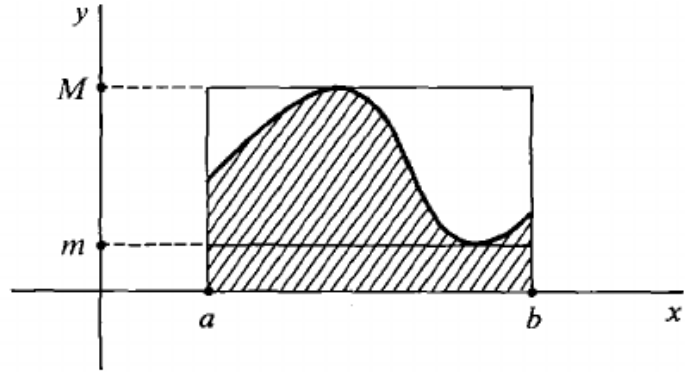
Infatti

$$m \leq f(x) \leq M$$

$$m \cdot (b-a) \leq \sum_a^b f(x) \Delta x \leq M \cdot (b-a)$$

Per trasferimento  $\sum_a^b f(x) dx$  è finito

Possiamo definire dunque  $\int_a^b f(x) dx = st \left( \sum_a^b f(x) dx \right)$



# proprietà

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

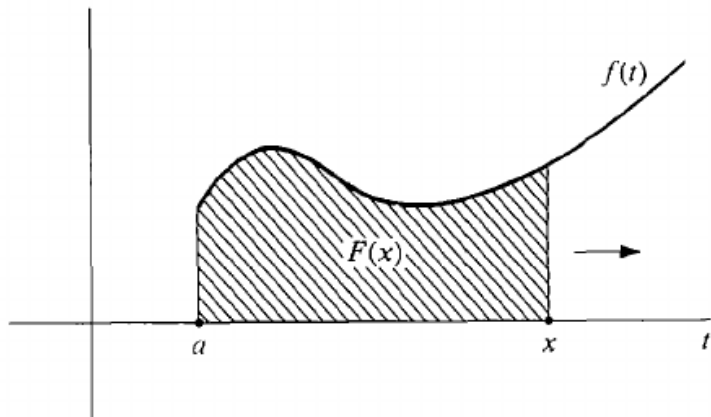
$$\int_a^b f(x) dx = - \int_a^b g(x) dx \quad \text{con } f(x) = -g(x)$$

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$$

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

# funzione integrale

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$



Proprietà

- $F(x)$  è continua

- $F(a) = 0$

- $F(b) = \int_a^b f(t) dt$

Più in generale:

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$$

per ogni c per cui definisco  $F(x) = \int_c^x f(t) dt$

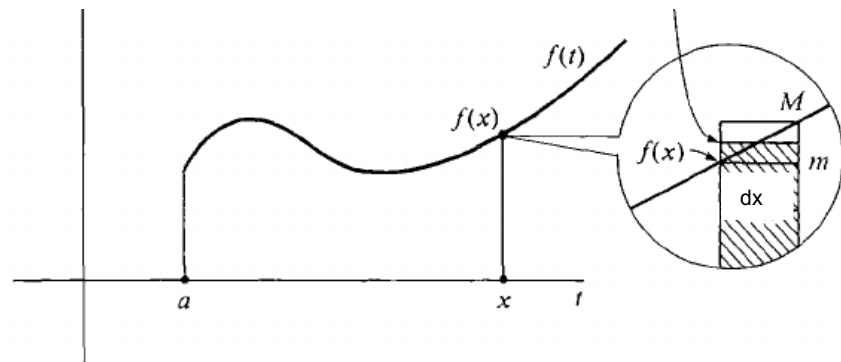
# continuità di $F(x)$

$$F(x+dx) - F(x) = \int_a^{x+dx} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt$$

$$F(x+dx) - F(x) = \int_a^{x+dx} f(t) dt + \int_x^a f(t) dt$$

$$F(x+dx) - F(x) = \int_x^{x+dx} f(t) dt$$

$$m \cdot dx \leq \int_x^{x+dx} f(t) dt \leq M \cdot dx$$



pertanto possiamo scrivere che  $F(x+dx) - F(x) \approx f(x) dx$

# Teorema di Torricelli-Barrow

Calcoliamo la derivata di  $F(x)$  usando il procedimento di Leibniz:

$$y = F(x)$$

$$y + dy = F(x + dx)$$

e quindi sostituendo:

$$F(x) + dy = F(x + dx)$$

$$dy = F(x + dx) - F(x)$$

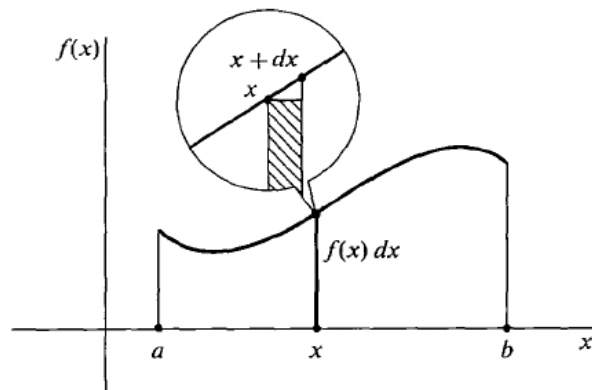
ma osservando il disegno a fianco è evidente

che la differenza  $F(x + dx) - F(x) \approx f(x) dx$

e quindi segue che:

$$dy = f(x) dx$$

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$



L'Associazione Mathesis - Società Italiana di Scienze MM. e FF. - sezione di Verona  
Il Dipartimento di Informatica dell'Università degli Studi di Verona  
Il Piano Lauree Scientifiche - Università degli Studi di Verona  
Il Gruppo promotore NSA - Verona

organizzano la

# 5<sup>a</sup> Giornata Nazionale di Analisi Non Standard

Verona, sabato 10 ottobre 2015

**grazie**