Il piè veloce Achille e la ipertartaruga

Roberto Zanasi

10 ottobre 2015

Zenone

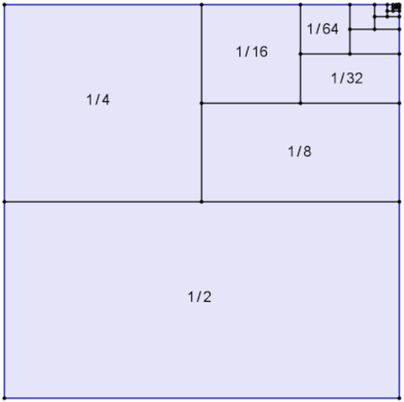
Un mobile più lento non può essere raggiunto da uno più rapido; giacché quello che segue deve arrivare al punto che occupava quello che è seguito e dove questo non è più (quando il secondo arriva); in tal modo il primo conserva sempre un vantaggio sul secondo.

Aristotele (secondo Wikipedia)

Obiezioni al paradosso

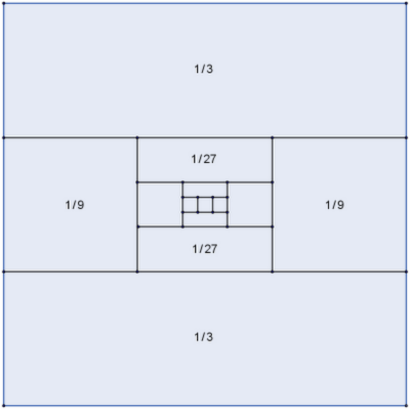
- Diogene: si alzò in piedi, si mise a camminare, si rimise a sedere.
- Qualche studente: "ah, davvero?".

Serie senza parole



$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 1$$

Serie senza parole

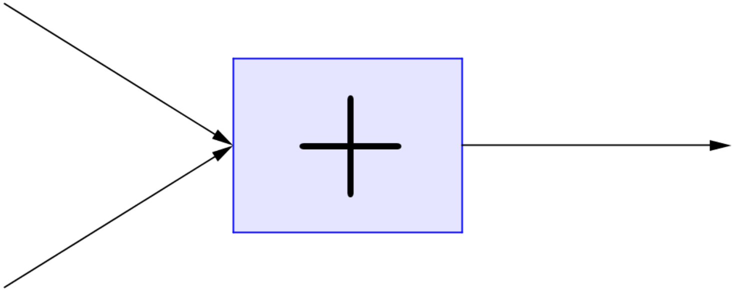


$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{2}$$

Numeri periodici

$$\frac{1}{3} = 0.3333\ldots = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{10^n}$$

Somma



Sommare infiniti termini: un passo alla volta

- $s_0 = a_0$
- $s_1 = a_0 + a_1$
- $s_2 = a_0 + a_1 + a_2$
- ...
- $s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$
- $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$
- È una somma finita
- Detta *successione delle somme parziali*

Un passo infinito

Se N è un ipernaturale infinito, allora

$$s_N = \sum_{k=0}^{N} a_k$$

è l'estensione iperreale della formula precedente.

Carattere di una serie

Studiare il carattere di una serie significa studiare il comportamento asintotico della sua successione delle somme parziali s_n.

Carattere di una serie

Se la parte standard di s_N esiste e non dipende da N (ipernaturale infinito), la serie si dice *convergente* e $s = \mathrm{st}(s_N)$ viene detta *somma* della serie.

Se, comunque si scelga N (ipernaturale infinito), si ha che s_N è un infinito positivo, la serie si dice *divergente positivamente*.

Se, comunque si scelga N (ipernaturale infinito), si ha che s_N è un infinito negativo, la serie si dice *divergente negativamente*.

In ogni altro caso la serie viene detta *oscillante*.

Esempio: una serie convergente

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

- $s_1 = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right)$
- $s_2 = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)$
- ...
- $s_n = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$
- Si semplifica quasi tutto
- $s_n = \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1}$

Esempio: una serie convergente

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

- $s_n = 1 - \frac{1}{n+1}$
- $s_N = 1 - \frac{1}{N+1} \approx 1$
- La serie converge, $s = 1$

Esempio: una serie divergente

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n$$

- $s_1 = 1$
- $s_2 = 1 + 2$
- ...
- $s_n = 1 + 2 + \cdots + n$
- Applicando la formula del piccolo Gauss:
- $s_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Esempio: una serie divergente

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n$$

- $s_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$
- $s_N = \dfrac{N(N+1)}{2}$ è un infinito per ogni N ipernaturale infinito
- La serie diverge (positivamente)

Esempio: una serie oscillante

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n$$

- $s_0 = 1$
- $s_1 = 1 - 1 = 0$
- $s_2 = 1 - 1 + 1 = 1$
- ...
- $s_n = \begin{cases} 1 & n \text{ pari} \\ 0 & n \text{ dispari} \end{cases}$

Esempio: una serie oscillante

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n$$

- $s_n = \begin{cases} 1 & n \text{ pari} \\ 0 & n \text{ dispari} \end{cases}$
- $s_N = \begin{cases} 1 & N \text{ ipernaturale pari} \\ 0 & N \text{ ipernaturale dispari} \end{cases}$
- La parte standard di s_N esiste, ma dipende da N: la serie è oscillante.

Condizione necessaria di convergenza

- $s_n = s_{n-1} + a_n$
- $a_n = s_n - s_{n-1}$
- $a_N = s_N - s_{N-1}$
- Ipotesi: la serie converge, cioè $s_N \approx s$ per ogni N
- Quindi anche $s_{N-1} \approx s$
- Allora $a_N = s_N - s_{N-1} \approx s - s = 0$

Teorema — Condizione necessaria di convergenza

Se una serie converge allora il termine generale, con indice infinito, è infinitesimo.

Negli esercizi:

Teorema — Condizione necessaria di convergenza

Se il termine generale di una serie, con indice infinito, non è infinitesimo, allora la serie non converge.

Serie a termini positivi

Una serie si dice *a termini positivi* se il suo termine generale è maggiore o uguale a zero per ogni valore di n.

Vantaggi: se $a_n \geq 0$ allora la successione delle somme parziali s_n è monotona non decrescente. Quindi può essere solo convergente o divergente.

Quindi la tesi "non converge" nella condizione necessaria di convergenza diventa "diverge".

C. N. di convergenza per serie a termini positivi

Teorema — Condizione necessaria di convergenza per serie a termini positivi

Se il termine generale di una serie a termini positivi, con indice infinito, non è infinitesimo, allora la serie diverge.

Esempio: la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2+1}{n+1}$ diverge.

Proprietà valide definitivamente

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n}_{\text{serie}} = \underbrace{\sum_{n=0}^{k} a_n}_{\text{finito}} + \underbrace{\sum_{n=k+1}^{+\infty} a_n}_{\text{serie}}$$

Teorema

Se si altera un numero finito di termini di una serie, si ottiene una serie avente lo stesso carattere della prima.

La serie geometrica

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n, \quad q \in \mathbf{R}$$

$$s_n = 1 + q + q^2 + \dots q^n$$

$$s_n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}, \quad q \neq 1$$

La serie geometrica

Studio di $s_N = \dfrac{q^{N+1} - 1}{q - 1}$.

- se $q > 1$ si ha che s_N è sempre un infinito positivo, quindi la serie diverge,
- se $q = 1$ si ha che $s_N = N + 1$, ancora un infinito positivo: la serie diverge,
- se $-1 < q < 1$ si ha che $q^{N+1} \approx 0$, quindi la serie converge a $\dfrac{1}{1 - q}$,
- se $q < -1$ si ha che q^{N+1} è un infinito, positivo se N dispari e negativo se N pari, quindi la serie oscilla.

La serie geometrica

Applicazione: la frazione generatrice di un numero decimale illimitato periodico. Quale frazione genera $0.333\ldots$?

$$
\begin{aligned}
0.333\ldots &= \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \cdots + \frac{3}{10^n} + \ldots \\
&= \frac{3}{10}\left(1 + \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{10^n} + \ldots\right) \\
&= \frac{3}{10}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{10^n} \\
&= \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{10}} \\
&= \frac{3}{10} \cdot \frac{10}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

Una questione delicata

Quanto fa $0.999\ldots$?

- Utilizzando il procedimento appena visto abbiamo:
$$0.999\cdots = \frac{9}{10}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{10^n} = \frac{9}{10}\cdot\frac{10}{9} = 1$$
- Obiezione: "$0.999\ldots$ e 1 non differiscono per un infinitesimo?"

Una possibile risposta:

$0.999\ldots$ è un numero reale, non può differire per un infinitesimo da un altro numero reale

"Allora sono due numeri reali diversi"

"E cosa c'è in mezzo?"

Una risposta più articolata

- Sia $d(x, n)$ la funzione che restituisce l'n-esima cifra dopo la virgola del numero reale x
- Esempio: $d(1/3, 42) = 3$
- Esempio: $d(5, 3) = 0$
- Si può definire l'estensione iperreale $d^*(x, n)$, con x iperreale e n ipernaturale
- Quindi si ha che $d(1/3, n) = 3$ per ogni n naturale o ipernaturale infinito

Una questione delicata

$$\frac{1}{3} = 0.\underbrace{333333\ldots}_{\substack{\text{posizioni}\\ \text{finite}}};\underbrace{\ldots 333333\ldots}_{\substack{\text{posizioni}\\ \text{infinite}}}$$

Da non confondere con la proprietà dei numeri iperreali finiti di essere composti da una parte standard e una parte infinitesima: per ogni $x \in \mathbf{R}^*$, finito, esistono un numero reale r e un infinitesimo ε tale che

$$x = r + \varepsilon.$$

$$x = a.\underbrace{d_1 d_2 d_3 \ldots d_n \ldots}_{\substack{\text{non è la}\\ \text{parte standard}}};\ldots d_N d_{N+1} \ldots$$

Una questione delicata

Se H è un ipernaturale infinito, il numero 10^{-H} può essere scritto

$$0.000\ldots;\ldots00100\ldots$$

in cui la cifra 1 occupa la posizione di indice H.

Ogni infinitesimo ammette una scrittura di questo tipo.

Non tutte le scritture di questo tipo sono infinitesimi. Non tutte sono numeri iperreali.

Una questione delicata

Per esempio:

$$0.000\ldots;\ldots999\ldots$$

non è un numero iperreale.

Infatti, se lo fosse, dovrebbe essere un infinitesimo. Ma se ad esso sommiamo 10^{-H} (con H ipernaturale infinito), otteniamo una catena di riporti che danno come risultato un numero finito, e questo è impossibile.

Una questione delicata

Non è solo un problema del periodo 9: anche la scrittura

$$0.000\ldots;\ldots 333\ldots$$

non rappresenta un numero iperreale: se lo si moltiplica per 3 si ottiene $0.000\ldots;\ldots 999\ldots$

Una questione delicata

Quindi l'idea intuitiva che un numero iperreale finito, che in forma decimale si può scrivere come

$$a.d_1 d_2 d_3 \ldots ; \ldots d_H \ldots$$

possa essere spezzato in questo modo

$$a.d_1 d_2 d_3 \ldots ; \ldots 0 \ldots + 0.000 \ldots ; \ldots d_H \ldots ,$$

con $a.d_1 d_2 d_3 \ldots ; \ldots 0 \ldots$ parte standard e $0.000 \ldots ; \ldots d_H \ldots$ un infinitesimo, è sbagliata.

E quindi, Achille raggiunge la tartaruga?

Confusione tra *procedimento* di calcolo e *risultato*.

Se H è un ipernaturale infinito,

$$1 - \frac{1}{10^H} = 0.\underbrace{999\ldots;\ldots999}_{H \text{ cifre}}000\ldots$$

è un numero non standard, minore di 1, infinitamente vicino a esso.

E quindi, Achille raggiunge la tartaruga?

$$\sum_{n=1}^{H} \frac{9}{10^n} < 1, \quad \text{per ogni } H$$

$$\operatorname{st}\left(\sum_{n=1}^{H} \frac{9}{10^n}\right) = 1, \quad \text{per ogni } H$$

$$0.999\ldots \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{st}\left(\sum_{n=1}^{H} \frac{9}{10^n}\right) = 1$$

Riferimenti

A. H. Lighstone, *Infinitesimals*. Queen's University.

http://tinyurl.com/tartaruga1

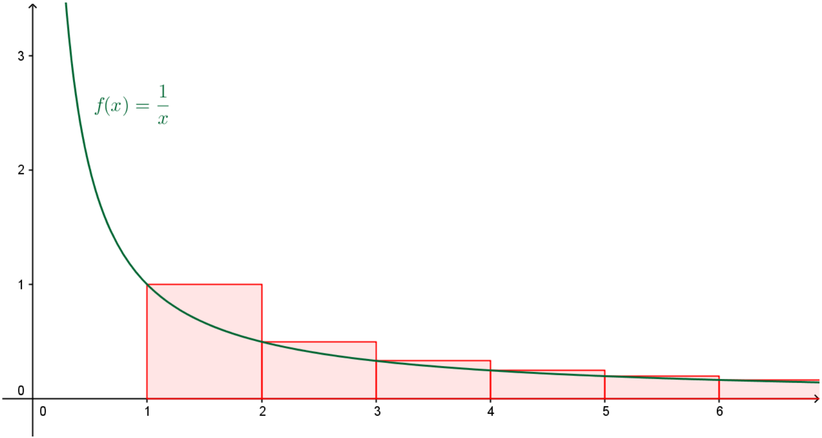
La serie armonica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

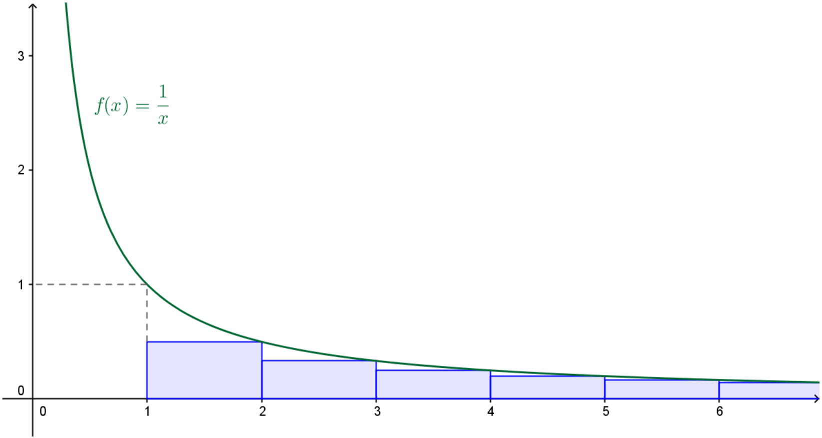
$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

$$s_N = ?$$

La serie armonica



$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx < \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$



$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} - 1 < \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$$

La serie armonica

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx < \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} < \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx + 1$$

$$\int_1^{H} \frac{1}{x} dx = [\ln x]_1^H = \ln H$$

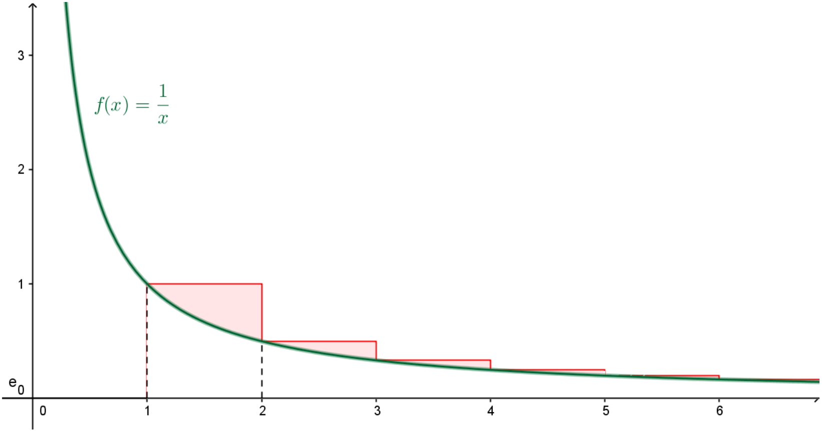
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \quad \text{è divergente.}$$

La costante di Eulero-Mascheroni

Se N è un ipernaturale infinito, la differenza tra $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k}$ e $\ln(N+1)$ è un numero finito la cui parte standard non dipende da N, e viene detto *costante di Eulero-Mascheroni*:

$$\gamma = \operatorname{st}\left(\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} - \ln(N+1)\right) = 0.57721566\ldots$$

La costante di Eulero-Mascheroni



La somma delle aree evidenziate non supera l'area del quadrato.

Stima dell'n-esimo numero armonico

Per n "abbastanza grande", si ha che

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \cong \ln(n+1) + \gamma$$

Un problema con la serie armonica

Su un estremo di una corda elastica lunga un metro si trova un bruco, che si muove alla velocità di un centrimetro al secondo nella direzione dell'altro estremo. Alla fine di ogni secondo, però, un diavoletto dispettoso tira l'elastico, allungandolo di un metro. Ce la farà il bruco ad arrivare fino in fondo?

Un problema con la serie armonica

Frazione di corda percorsa dal bruco:

- Passo 1: $\dfrac{1}{100}$
- Passo 2: $\dfrac{1}{100} + \dfrac{1}{200}$
- Passo 3: $\dfrac{1}{100} + \dfrac{1}{200} + \dfrac{1}{300}$
- ...
- Passo n: $\dfrac{1}{100} + \dfrac{1}{200} + \dots \dfrac{1}{100n}$

Un problema con la serie armonica

$$\frac{1}{100} + \frac{1}{200} + \dots \frac{1}{100n} = \frac{1}{100} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq 1 \quad \text{per qualche } n?$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq 100$$

Sì, perché la serie armonica è divergente.

Un problema con la serie armonica

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \cong \ln(n+1) + \gamma \geq 100$$

$$\ln(n+1) \geq 100 - \gamma$$

$$n + 1 \geq e^{100-\gamma}$$

$$n \geq^{100-\gamma} -1 \cong 1.5 \times 10^{43}$$

La serie armonica diverge, ma con calma.

Criterio del confronto

Date due serie a termini positivi $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$, tali che $a_n \leq b_n$ per ogni n,

- se $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ converge, allora $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge,
- se $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ diverge, allora $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ diverge.

Criterio del confronto

Traccia di dimostrazione:

- $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ converge
- $s_n = b_0 + b_1 + \cdots + b_n$ converge
- s_n è limitata
- $r_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n \leq s_n$
- r_n è monotona e limitata
- r_n converge
- $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge

Criterio del confronto asintotico

Date due serie a termini positivi $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$, se esiste

$$\mathrm{st}\left(\frac{a_N}{b_N}\right) = s \neq 0$$

e non dipende dal particolare ipernaturale infinito N, allora le due serie hanno lo stesso carattere.

(Nella pratica: a_N e b_N sono infinitesimi dello stesso ordine)

Traccia di dimostrazione:

- $\dfrac{a_N}{b_N} \approx s$ per ogni N
- esistono due numeri reali r_1 e r_2 tali che $r_1 \leq \dfrac{a_N}{b_N} \leq r_2$ per ogni N
- $r_1 \leq \dfrac{a_n}{b_n} \leq r_2$ definitivamente
- $r_1 b_n \leq a_n \leq r_2 b_n$
- ci si riconduce al criterio del confronto

Criteri del rapporto e della radice

Data una serie a termini positivi $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$, se, per ogni ipernaturale infinito N, si ha che

$$\frac{a_{N+1}}{a_N} \approx \ell \qquad \text{oppure} \qquad \sqrt[N]{a_N} \approx \ell$$

(con $\ell \in \mathbf{R}$ oppure ℓ infinito positivo) allora

- se $\ell < 1$ la serie converge,
- se $\ell > 1$ la serie diverge.

Criterio del rapporto

Traccia di dimostrazione:

- $\dfrac{a_{N+1}}{a_N} \approx \ell$
- i termini a_N sono indistinguibili da quelli di una progressione geometrica di ragione ℓ
- a_N indistinguibile da $k\ell^N$
- se $\ell < 1$ la serie converge, se $\ell > 1$ la serie diverge
- se $\ell = 1$ non si può concludere niente, il criterio non è efficace

Criterio della radice

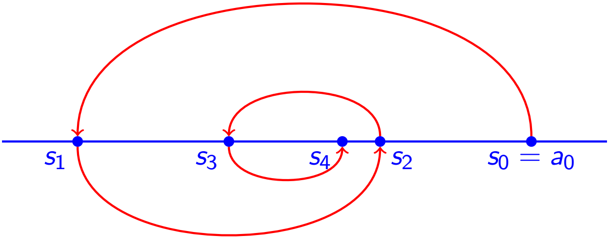
Traccia di dimostrazione:

- $\sqrt[N]{a_N} \approx \ell$
- $\sqrt[N]{a_N} = \ell + \varepsilon$
- $a_N = (\ell + \varepsilon)^N$
- se $\ell > 1$
  - esiste $q \in \mathbf{R}$ compreso tra 1 e ℓ tale che $a_N \geq q^N$
  - quindi $a_n \geq q^n$ da un certo punto in poi
- se $\ell < 1$
  - esiste $q \in \mathbf{R}$ compreso tra ℓ e 1 tale che $a_N \leq q^N$
  - quindi $a_n \leq q^n$ da un certo punto in poi
- ci si riconduce al criterio del confronto

Serie a termini di segno alterno

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n$$

$a_n > 0,\ a_n > a_{n+1},\ a_N \approx 0$ per ogni N ipernaturale infinito



Teorema — Criterio di Leibniz

Data una serie a termini di segno alterno $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_n$, se $a_n > 0$, $a_n > a_{n+1}$, $a_N \approx 0$ per ogni N ipernaturale infinito, allora la serie converge.

Serie a termini di segno qualunque

$$a_n = a_n + |a_n| - |a_n| = |a_n| - (|a_n| - a_n)$$

$$|a_n| - a_n = \begin{cases} 0 & a_n \geq 0 \\ -2a_n & a_n < 0 \end{cases}$$

$$|a_n| - a_n \geq 0$$

$$|a_n| - a_n \leq 2|a_n|$$

Se $\sum |a_n|$ converge, allora $\sum(|a_n| - a_n)$ converge per il criterio del confronto. Quindi

$$\sum a_n = \sum |a_n| - \sum(|a_n| - a_n)$$

converge.

Definizione

Se la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$ converge, allora la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ si dice *assolutamente convergente*.

Teorema della convergenza assoluta

Se una serie converge assolutamente, allora converge.

Fine

Questo materiale si trova all'indirizzo
http://tinyurl.com/tartaruga2

Grazie per l'attenzione