MATHESIS

Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche
Fondata nel 1895

Sezione di Verona

Redazione: Luciano Corso, Luigi Marigo, Elisabetta Capotosto – Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045)8344785 - Numero 1 – gennaio-febbraio 1998

Ordine di infinito di lnx

di Luigi Marigo

La proprietà archimedea dei reali afferma che $\forall\alpha>0$ e $\forall y\ \exists n\in \mathbf{N} : n\alpha>y$. Da essa segue che solo lo zero è piú piccolo di ogni numero: consideriamo infatti le disuguaglianze $0\leq\alpha\leq(1/n)\ \forall n\in \mathbf{N}$ equivalenti alla affermazione che α è piú piccolo di ogni numero; se vale la proprietà archimedea, esse sono soddisfatte solo da $\alpha=0$: infatti se, per assurdo, fosse $\alpha>0$ esisterebbe un $n\in N$ tale che $n\alpha>1$, $\alpha>(1/n)$, contro l'ipotesi. È altresì noto che

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^{\alpha}}=0 \qquad \forall\alpha>0$$

per cui si può affermare che l'ordine di infinito di lnx rispetto a x è un numero piú piccolo di ogni numero. Se accettiamo la proprietà archimedea, tale ordine di infinito è zero; ma ciò non può essere perché

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^{0}}=\infty$$

il che ci impone l'alternativa:

1) o si concede a lnx un trattamento speciale nella questione dell'ordine degli infiniti,

2) o si rinuncia alla proprietà archimedea, che deriva dalla non limitatezza di **N**. Scegliendo l'alternativa 2 si ammette l'esistenza di un $\gamma\in \mathbf{R}^{+}$ tale che $n<\gamma\ \forall n\in \mathbf{N}$; poiché è $\gamma>0$ si ha $(1/\gamma)<(1/n)\ \forall n\in \mathbf{N}$: $(1/\gamma)\neq0$ è un infinitesimo. Possiamo quindi dire che l'ordine di infinito di lnx è «infinitesimo»: se, come si assume nella analisi non standard, l'infinitesimo è considerato numero, allora la questione dell'ordine di infinito di lnx trova la giusta collocazione.

Bibliografia: Per quanto riguarda la proprietà archimedea si veda Tom M. Apostol, Calcolo: analisi 1, Bollati Boringhieri, Torino, 1977. Per un approccio alll'analisi non standard si veda H. Jerome Keisler – Elementi di analisi matematica – Piccin editore, Padova, 1982.

L'arte del contare

di Luciano Corso

Come è noto, una delle parti più difficili della matematica è quella che si interessa del problema del contare. Gli studenti si stupiscono quando sentono questa affermazione per la prima volta. È difficile far credere loro che il contare è una operazione veramente complessa. Il calcolo combinatorio presenta alcuni sistemi di conteggio molto efficienti, ma molti problemi combinatorici sono ancora aperti. Sapere che vi sono campi di ricerca aperti in matematica è una scoperta stimolante per tutti. Presentiamo qui quattro schemi classici di conteggio, rivisti in chiave moderna.

Numero di funzioni su insiemi finiti

E' il numero di funzioni possibili da un n-insieme ad un m-insieme. Se si considera lo schema delle biglie nelle scatole, si parte da n biglie distinguibili ed m scatole distinguibili e ci si chiede in quanti modi si possono porre n biglie distinguibili in m scatole distinguibili. Per costruzione si può arrivare alla formula risolutiva (il bello del calcolo combinatorio è che le formule generali – i teoremi – si possono dimostrare per costruzione). Vi sono m modi di porre la prima biglia in una delle m scatole; vi sono poi ancora m modi di porre la seconda biglia in una delle m scatole; e così via. In totale si hanno $(m)^n$ funzioni. Per esempio supponiamo di avere m=3 scatole (codominio) e n=2 biglie (dominio): il numero di funzioni è dato da $3^2=9$. Vediamole:

(1,2) ( ) ( )	(1) (2) ( )	(2) (1) ( )
( ) (1,2) ( )	(1) ( ) (2)	(2) ( ) (1)
( ) ( ) (1,2)	( ) (1) (2)	( ) (2) (1)

Numero di iniezioni su insiemi finiti

Se in scatole distinte dobbiamo porre biglie distinte, siamo in presenza di iniezioni. In questo caso il numero di biglie n deve essere minore o uguale al numero di scatole m. Il numero di iniezioni da un n-insieme ad un m-insieme è da $(m)_n = m(m-1)...(m-n+1)$. Ci sono infatti m modi di porre la prima biglia in una delle m scatole, ma poi ce ne sono (m-1) modi di porre la seconda nelle (m-1) scatole ancora vuote; e così via. Vediamo la configurazione per m=3 e n=2:

(1)(2)( )	(1)( )(2)	( )(1)(2)
(2)(1)( )	(2)( )(1)	( )(2)(1)

Nella terminologia classica le iniezioni vengono dette disposizioni semplici. Nel nostro caso il numero di iniezioni è: $(3)_2=3\cdot2=6$.

Multinsieme

Consideriamo ora il seguente problema: in quanti modi si possono inserire n palle distinguibili in m scatole distinguibili se ci interessa anche l'ordine di inserimento delle palle nelle scatole, cioè come esse si dispongono dentro? Per dare risposta al problema si consideri il seguente ragionamento: Supponiamo che nelle m scatole siano già state poste n-1 biglie, cioè:

$$\underset{x_1}{(\quad)}\ \underset{x_2}{(\quad)}\ \ldots\ \underset{x_i}{(\quad)}\ \ldots\ \underset{x_m}{(\quad)}$$

ove x_i è il numero di biglie contenute nella scatola i-esima. Allora vi sono x_i+1 modi di inserire l'ultima biglia nella i-esima scatola, per ogni i. Infatti l'n-esima biglia può essere inserita o ai margini o negli intermezzi delle biglie già presenti. Da cui: $(x_1+1)+(x_2+1)+\ldots+(x_i+1)+\ldots+(x_m+1)=n-1+m$. Se consideriamo la penultima palla, per analogia si ha: $(x_1+1)+\ldots+(x_m+1)=n-2+m$. In generale, quindi, per le n biglie i modi di inserimento nelle m scatole, là dove conta l'ordine in cui le biglie sono disposte nelle scatole, si ha: $(m+n-1)_n$. Con m=3 scatole e n=2 biglie si ottengono così $(3+2-1)_2=12$ collocamenti possibili.

Parole non decrescenti

Con un alfabeto lungo n e si vogliano costruire parole lunghe m in modo tale che ciascuna di esse sia non decrescente rispetto a quelle che la precedono in un ordinamento in cui le parole stesse vengono poste in modo che le lettere che le compongono siano non decrescenti rispetto all'ordine dell'alfabeto di origine. Per esempio in un alfabeto lungo 4 con i caratteri ABCD le parole non decrescenti lunghe due sono:

AA AB AC AD BB BC BD CC CD DD

Si chiede se è possibile trovare il numero che conta gli insiemi che si ottengono con questo schema. La risposta è sí. La relazione è data da:

$$\binom{n+m-1}{m}$$

Nel nostro caso si ha:

$$\binom{4+2-1}{2}=10\,.$$

Bibliografia: M. Cerasoli, F. Eugeni, M. Protasi, Matematica discreta, ed. Zanichelli, Bologna, 1992

I postulati di Galileo

La scienza moderna ha elaborato dei postulati sui quali essa si basa. Proponiamo, di seguito, una riflessione su di essi. La prima elaborazione fu fatta da Galileo Galilei. Dai suoi scritti (Il Saggiatore, Dialogo …) si evincono queste posizioni 1) la natura è governata da leggi; 2) le leggi di natura sono scritte in linguaggio matematico; 3) l'uomo può venire a conoscere le leggi di natura; 4) il metodo per conoscere le leggi di natura è quello sperimentale; 5) l'esperimento deve essere riproducibile n volte e tutte le prove devono convalidare la teoria (principio dell'oggettività scientifica). (*continua*)

A tutti i soci d'«onore»

Caro collega,
l'edizione di questo foglio bimestrale è stata deliberata dall'assemblea dei soci di Verona del 19-12-'97 e riteniamo che possa giovare a ciascuno di noi avere occasione di riflessioni «leggere» su questioni varie, proposte in forma breve e sintetica. E' inoltre segno di vitalità della sezione veronese. Ti chiediamo di inviare qualche tuo contributo (non dobbiamo fare tutto noi) in redazione; di curare la diffusione di questo foglio tra gli insegnanti di matematica. Grazie e cordiali saluti.

La difficile arte di insegnare

Dopo anni di insegnamento, abbiamo scoperto quale caratteristica contraddistingue piú di ogni altra la difficile arte di insegnare. Siamo convinti finalmente che per essere buoni insegnanti occorre prima di tutto (condizione necessaria, ma non sufficiente) essere abili nell'esercizio della pazienza. Quante volte infatti dopo una lezione perfetta (almeno nelle nostre fantasie) abbiamo avuto la sensazione di parlare a vuoto? È la solita domanda insulsa di chi non gliene importa niente della matematica, della scuola, di noi, che sfinisce l'energia che ci è rimasta dentro. In quei momenti ci chiediamo che senso ha tutto il nostro sforzo; chi siamo! Ma sono proprio i «nessuno» che hanno bisogno di noi, del nostro lavoro. Ed è sui «nessuno» che bisogna operare per svolgere quel ruolo fondamentale che fa crescere il sapere e quindi l'uomo. La storia dimostra abbondantemente quanto siano stati importanti per gli uomini gli insegnanti. Noi non siamo solo portatori di conoscenza, siano anche e soprattutto educatori e come educatori dobbiamo accettare le trasgressioni, il rifiuto, la rinuncia a capire dei giovani, i «nessuno» della scuola. Se i giovani hanno delle buone ragioni, dobbiamo anche sostenerle e cambiare rotta. Solo con la pazienza e l'umiltà possiamo però accettare questo ruolo e i «nessuno» potranno diventare futuri Newton, Einstein. (L.C.)

Giovanni di Cornovaglia

di Carla Benaglia

In una conferenza del prof. Silvio Maracchia (Università La Sapienza di Roma) dal titolo "Gödel in pillole", tenutasi a Verona nel '94, si trattò della coerenza di un sistema formale in cui vale il principio di non contraddizione, che risale ad Aristotele: si ha che se la proposizione A è vera, allora $\neg A$ è falsa ($\neg(\neg A \wedge A)$ è una tautologia).

In quell'occasione venne evidenziato che già nel XII-XIII secolo il logico Giovanni di Cornovaglia, (detto Pseudo-Scoto) dimostrò che in un sistema formale contraddittorio, in cui cioè è vero A e $\neg A$, si può dimostrare la verità di qualunque espressione proposizionale. Infatti se A è vero e $\neg A$ è vero si ha:

$$\begin{array}{ccc} \dfrac{A \wedge \neg A}{A} & & \dfrac{A \wedge \neg A}{\neg A} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \dfrac{A}{A \vee B} & \rightarrow & \dfrac{\neg A\,,\, A \vee B}{B} \end{array}$$

Si dimostra, cosí, che dall'ipotesi che siano vere A e $\neg A$ e dalla verità di $A \vee B$ si può dedurre la verità di una qualunque espressione B.

2000
anno internazionale ONU della matematica