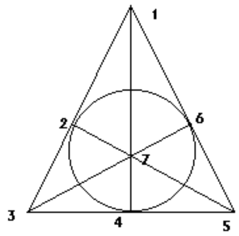
MATHESIS

Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche
Fondata nel 1895

Sezione di Verona

Redazione: Luciano Corso, Luigi Marigo, Elisabetta Capotosto – Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045)8344785 - Numero 2 – marzo-aprile 1998



Piano di Fano

A proposito di giochi matematici

di Giuliana Breoni

Recentemente si sono tenute nelle nostre scuole superiori le Olimpiadi di Matematica ’98 e anche la gara di competizione interclassi di II e III anno. Molti insegnanti di matematica hanno fatto partecipare i loro alunni a tali prove con entusiasmo ma anche con un certo timore e, almeno per me, con un certo imbarazzo. Imbarazzo sí, perché queste gare pongono i problemi, in modo molto diverso da quello che normalmente si ricava dai nostri testi scolastici e i ragazzi, abituati a esercizi dati in progressione di difficoltà, sempre legati al lavoro in classe appena fatto, si disorientano. Forse dobbiamo dare ragione a quell’articolo apparso sulla stampa nazionale che riportava che gli italiani, con gli americani, sono all’ultimo posto al mondo per cultura e conoscenza matematica? Per un matematico italiano, tutto ciò suona come un’accusa. Senza entrare nel merito di tale affermazione, vorrei sottolineare che esiste comunque una difficoltà da parte degli studenti ad affrontare giochi e gare competitive internazionali di matematica, e la difficoltà è anche nostra. Affrontando analiticamente questi questionari sui quali poi si valutano le capacità e le conoscenze, si scopre, ad esempio, che si deve cogliere la regola risolutiva per costruzione dal caso particolare, e ciò è completamente diverso da tutto quello che si insegna nelle nostre scuole dove la teoria generale prevale su qualsiasi applicazione sperimentale: prima infatti si studia quella e poi forse la si applica a casi concreti ed interessanti. Noi non crediamo che i nostri programmi siano ristretti ed insufficienti, ma forse sono troppo teorici e poco sperimentali. Sconcerta soprattutto il fatto che le soluzioni si debbano ricavare caso per caso con tentativi intelligenti senza regole generali. È da notare inoltre che i quesiti che riguardano la probabilità e la statistica – posti anche in modo divertente – sono molto frequenti.

C’è sicuramente un vantaggio nell’affrontare problemi in questo modo perché, al di là delle strette conoscenze teoriche (teoremi ed algoritmi già codificati) si dà maggiore risalto alle capacità intuitive e creative e si può sbloccare la fantasia a vantaggio della creatività. Forse in questo modo i nostri giovani sarebbero più incentivati ed interessati alla risoluzione di problemi e quindi anche alla valorizzazione delle procedure risolutive che essi stessi hanno individuato o scoperto. Ma tutto ciò scuote le fondamenta della tradizionale didattica matematica italiana.

Distribuzione asintotica dei numeri primi

di Arnaldo Vicentini

Il teorema sulla distribuzione dei numeri primi afferma che il *gap* medio tra numeri primi consecutivi nei dintorni di n tende a coincidere con ln(n) al crescere di n (congetturato da Gauss e Legendre all’inizio dell’800, fu provato da Hadamard e da De la Vallée Poussin indipendentemente nel 1896. Fonte: Encyclopaedia Britannica, Vol. 18, voce “*Prime Number*”). Precisamente, se $\pi(m,n)$ è il numero di primi tra i naturali m incluso ed n escluso, con $2\leq m\leq n$, al tendere all’infinito di m e di n in modo che anche n-m diverga ma $(m/n)\rightarrow 1$, il prodotto $\ln(m)\cdot[\pi(m,n)/(n-m)]$ tende a 1. Una dimostrazione rigorosa del teorema è considerata *still difficult* dall’Encyclopaedia Britannica (1967).Si può però affrontare l’argomento alla stregua con cui, per esempio, in termodinamica si tratta la pressione di un gas come funzione continua dei suoi punti benché prodotta da bombardamento molecolare discontinuo. Poiché incontrando l’enunciato del teorema mai ebbi la fortuna di leggerne anche la prova, mi è parso utile proporla, quale pretesto per rivisitare l’affascinante argomento, nella forma costruttiva che ho ricavato autonomamente, pur senza presunzione di originalità.

Sia m un intero positivo scelto a caso e p_j il j-esimo primo in ordine crescente. Il resto della divisione di m per un $p_j<m$ cade tra 0 e p_j-1 inclusi. Assumiamo perciò che la probabilità che m non sia divisibile per p_j sia $1-1/p_j$. Detta p(m) la probabilità che m sia primo, p(m) è allora il prodotto di tutti i fattori del tipo $(1-1/p_j)$ con $p_j<\sqrt{m}$:

$$p(m)=\prod_{p_j<\sqrt{m}}\left(1-\frac{1}{p_j}\right) \qquad [1.1]$$

Siano m ed r due interi positivi, sia r>m, sia p_h il massimo dei primi minori di $\sqrt{m}$ e sia p_k il massimo dei primi minori di $\sqrt{r}$. Detta p(m) la probabilità che m sia primo, la probabilità p(r) che sia primo r risulta:

$$p(r)=p(m)\cdot\prod_{j=h+1}^{k}\left(1-\frac{1}{p_j}\right)= \qquad [1.2]$$
$$=p(m)\cdot Exp\left[\sum_{j=h+1}^{k} ln\left(1-\frac{1}{p_j}\right)\right]$$

Per m molto grande possiamo approssimare $\ln(1-1/p_j)$ con $-1/p_j$ e scrivere:

$$p(r)=p(m)\cdot Exp\left[-\sum_{j=h+1}^{k}\left(1/p_j\right)\right] \qquad [1.3]$$

Supponiamo che esista una funzione P(x) continua e derivabile che approssimi asintoticamente la probabilità discreta p(r) per x=r intero. Nell'intervallo dt piccolo rispetto a t prossimo a p_j sono attesi $P(t)\cdot dt$ primi. Allora possiamo approssimare la sommatoria in [1.3] con un integrale ottenendo:

$$P(x) = P(m)\cdot Exp\left[-\int_{\sqrt{m}}^{\sqrt{x}} \frac{P(t)}{t}\cdot dt\right] \qquad [1.4]$$

Derivando ciascun membro di [1.4] ricaviamo:

$$\frac{dP(x)}{dx} = P(x)\cdot\left[-\frac{P(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\right]\cdot\frac{d\sqrt{x}}{dx} = = -\frac{P(x)\cdot P(\sqrt{x})}{2x} \qquad [1.5]$$

E' immediato verificare che l'equazione differenziale [1.5] è risolta da P(x)=1/ln(x), ossia che il *gap* medio tra primi consecutivi nei dintorni di x molto grande è ln(x). Con ciò, il numero atteso π*(m,n) di primi tra m ed n entrambi molto grandi vale:

$$\pi^*(m,n) = \int_m^n \frac{1}{ln(x)}dx \qquad [1.6]$$

Attenzione!

Tutti possono collaborare al presente foglio, inviando un contributo originale di una colonna al massimo alla redazione

Dicotomie sul concetto di spazio

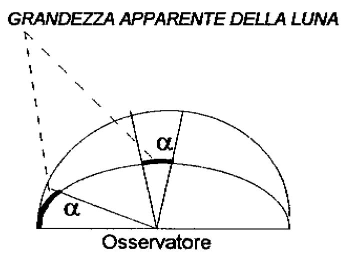
di Carlo Veronesi

Nelle note di commento ai programmi del Piano Nazionale Informatica si sottolinea che i concetti fondamentali della teoria della relatività sono stati spesso oggetto di riflessione in campo filosofico: se ne raccomanda perciò una introduzione multidisciplinare.

Per quanto riguarda il concetto di spazio vengono qui presentate alcune dicotomie (cioè concetti contrapposti, ma talora anche complementari), facendo riferimento a scienziati, a filosofi e a matematici che storicamente hanno sostenuto, a volte in modo implicito, l'uno o l'altro dei punti di vista in opposizione.

I) Spazio reale vs Spazio categoria mentale

Lo spazio è stato considerato una realtà esterna all'uomo fino a Kant, per il quale invece costituisce una categoria della mente. Per Kant infatti la mente umana non può organizzare l'esperimento se non attraverso lo schema spaziale della geometria euclidea. A questa concezione si può obiettare che lo spazio della percezione visiva non è rigorosamente euclideo. Il senso della vista è soggetto a vari tipi di illusioni ottiche: per esempio, valuta diversamente le grandezze a seconda che si guardi in orizzontale o in verticale. Un uomo per la strada, a qualche decina di metri, appare grande e vicino; se si trova a 20 metri di altezza sembra minuscolo e lontano. Famosa è anche la "illusione della luna", che ci appare molto grande all'orizzonte e piccola allo zenith. Il nostro modello percettivo è soggetto a una evidente anisotropia. A breve distanza è sensibilmente sferico e simmetrico come uno spazio euclideo; al crescere della distanza la curvatura si appiattisce (vedere la figura). Naturalmente si può pensare di eliminare le anomalie della percezione visiva (per es. facendo uso di strumenti di osservazione) e intendere lo spazio kantiano non come spazio percettivo, ma come un suo modello più astratto e mentale. Ma la scoperta delle geometrie non euclidee, nel corso del XIX secolo, mette ugualmente in crisi la concezione di Kant. La geometria di Euclide non è più l'unica possibile: esistono geometrie alternative (in cui, per esempio, la somma degli angoli interni di un triangolo è diversa da un angolo piatto) che sono altrettanto coerenti e anche applicabili, in opportune situazioni, allo spazio fisico.



Nella figura la linea curva superiore indica lo spazio reale, la linea sottostante indica lo spazio percettivo. La Luna, vista sotto lo stesso angolo α, ha la stessa grandezza reale nelle due posizioni, ma grandezza apparente sensibilmente minore allo zenith.

II) Spazio indipendente vs Spazio relazionale

Secondo il primo punto di vista lo spazio esiste indipendentemente dalle figure o dai corpi in esso immersi. Questa posizione è sostenuta da Platone nel Timeo: "Lo spazio (…) non ammette distruzione ed offre una sede a quante cose si generano". Euclide, che pure è stato spesso ritenuto un platonista, considera invece ogni figura per se stessa, senza far riferimento a uno spazio ambiente in cui le varie figure coesistono. In questo modo lo spazio assume un carattere puramente relazionale, diventa cioè un sistema di relazioni non dotato di esistenza autonoma. Al contrario, la geometria analitica, da Cartesio in poi, deve far riferimento ad uno spazio che precede le coordinate dei suoi punti. Perciò la geometria analitica (come la geometria delle trasformazioni) deve essere collocata sul versante dello spazio indipendente. (*continua*)

Strambi, matti, matematici

Tutte le volte che un cultore di matematica si trova in mezzo a uomini di cultura, ha spesso il ruolo di colui che vive in un mondo strano, dove le questioni che travagliano la vita degli uomini non valgono. Egli è strambo nel modo di rapportarsi alla vita; è per definizione un isolato, uno che stenta ad integrarsi in una società dove i simboli e le parole devono essere di facile significato. Il matematico è un matto. Come si può dare credito ad una disciplina che rende gli uomini così? Per questo la matematica non ha spazio sui media nazionali.