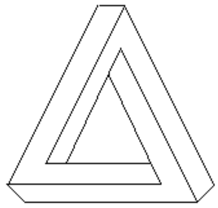
MATHESIS

Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche

Fondata nel 1895

Sezione di Verona

Redazione: Luciano Corso, Luigi Marigo, Elisabetta Capotosto – Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045)8344785 - Numero 3 – aprile 1998



M. C. Escher

Sull'insieme delle parti di X

di Luciano Corso

Nel definire gli oggetti matematici, si possono usare definizioni equivalenti sul piano concettuale, ma non su quello operativo. L'insieme delle parti di un insieme X= {a,b,c,d} viene definito nel modo seguente: (1) dato un insieme X, si dice insieme delle parti di X l'insieme di tutti i sottoinsiemi possibili di X, compreso quelli impropri (X stesso e il vuoto). Diamo ora una diversa definizione: (2) dato un insieme X per insieme delle parti di X si intende l'insieme di tutti i sottoinsiemi che si possono ottenere da tutte le partizioni possibili di X in due sottoinsiemi,. considerando anche i sottoinsiemi impropri X e ∅.

Le definizioni (1) e (2) sono corrette, ma mentre la (1) non ci dà alcun criterio per costruire l'insieme delle parti, la (2) permette di costruirlo. Le definizioni costruttive sono sempre da preferire alle altre, perché permettono di eseguire operativamente quelle procedure che consentono di determinare l'oggetto definito. È facile applicare la seconda definizione per risolvere il nostro problema:

{ }	{a,b,c,d}
{a}	{b,c,d}
{b}	{a,c,d}
{c}	{a,b,d}
{d}	{a,b,c}
{a,b}	{c,d}
{a,c}	{b,d}
{a,d}	{b,c}

Con questo metodo è più difficile perdere qualche sottoinsieme nella costruzione dell'insieme delle parti e si ha immediatamente la ragione della formula che permette il calcolo della sua cardinalità. Essa infatti non è altro che il numero di k-parti, con k=0,1,2,3,4, di un (n= 4)-insieme. Per cui:

$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$; e nel nostro caso: $\sum_{k=0}^{4}\binom{4}{k}=2^4=16$.

Si può anche ritenere che la cardinalità dell'insieme delle parti sia il numero di funzioni che da un n-insieme (dominio=D), che può essere identificato con n palline numerate, portano ad un 2-insieme (codominio=C), che può essere identificato con 2 scatole numerate. Il risultato è sempre $|C|^{|D|}=2^n$.

Possiamo anche raccogliere una preziosa osservazione tratta da [B.1]. Definiamo una funzione indicatore che da X vada all'insieme {0,1} in questo modo:

$$I_A(x)=\begin{cases}1 & se\ x\in A\\ 0 & se\ x\notin A\end{cases}\quad \forall x\in X$$

Ogni funzione da D=X a {0,1} identifica così una parte di X. Per esempio le funzioni

$$I_A(a,b,d)=\begin{pmatrix}a & b & c & d\\ 1 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix},\ I_A(b,c)=\begin{pmatrix}a & b & c & d\\ 0 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

rappresentano le parti {a,b,d} e {b,c}. Anche in questo modo arriviamo a valutare la cardinalità dell'insieme delle parti: 2^n.

In ogni caso si saltano le pericolose dimostrazioni per induzione della formula della cardinalità dell'insieme delle parti.

[B.1} A. M. Cerasoli e M. Cerasoli, Calcolo delle probabilità, Zanichelli, Bolognaq, 1991.

Dicotomie sul concetto di spazio

(seconda parte)

di Carlo Veronesi

Fra i sostenitori più radicali dello spazio indipendente dobbiamo annoverare Newton, per il quale lo "spazio assoluto" è addirittura coeterno a Dio ed esisteva anche prima della creazione del mondo (palcoscenico vuoto in attesa dei fenomeni naturali). Secondo le sue parole «lo spazio assoluto, per sua natura senza relazione ad alcunché di esterno rimane sempre uguale e immobile…». E in questo spazio assoluto, per Newton, esiste anche un riferimento assoluto:«Il centro del sistema del mondo è in quiete. Questo è accordato da tutti, sebbene alcuni discutano se nel centro del sistema siano in quiete la Terra o il Sole».

Einstein sottolinea che lo spazio assoluto newtoniano costituisce uno spazio indipendente in senso forte. Per Newton – scrive Einstein - «non solo lo spazio è introdotto come una cosa indipendente dagli oggetti materiali, ma gli viene anche assegnato un ruolo assoluto (…) nel senso che lo spazio (in quanto sistema inerziale) agisce su tutti gli oggetti materiali, mentre questi, a loro volta, non esercitano alcuna reazione sullo spazio».

III) Spazio geometrico vs Spazio fisico

La distinzione appare, a prima vista, abbastanza chiara: oggetto della fisica è lo spazio reale, mentre la geometria studia gli spazi logicamente possibili. Ma, a questo proposito, è interessante osservare che la geometria sembra aver seguito un percorso storico inverso rispetto alla fisica. Abbiamo già detto che Euclide non considera uno spazio indipendente dalle figure, mentre nella geometria moderna, soprattutto con l'idea di trasformazione, lo spazio viene prima delle figure. La geometria moderna sembra obbedire all'assunto implicito di "salvare lo spazio indipendente".

La fisica ha seguito invece un tragitto che ha portato all'abbandono dello spazio indipendente. Nelle recenti teorie relativistiche, diversamente da quanto riteneva Newton, lo spazio non è indifferente alla presenza dei corpi: le masse incurvano la struttura dello spazio-tempo al punto di cambiare la traiettoria dei raggi luminosi. Per usare ancora le parole di Einstein «non esiste nessuno spazio vuoto, cioè nessun spazio senza un campo». Per concludere osserviamo che, facendo riferimento all'ultima dicotomia, ne possiamo considerare altre più specializzate.

Spazio limitato vs Spazio illimitato
Spazio discreto vs Spazio continuo

Mentre lo spazio della geometria di Euclide è potenzialmente illimitato (una retta può essere prolungata indefinitamente), lo spazio della cosmologia, secondo molte teorie moderne, è limitato. Mentre lo spazio della geometria ordinaria è continuo, la fisica moderna sembra riprendere le antiche concezioni atomistiche e pitagoriche di uno spazio formato da particelle indivisibili. Ma questi discorsi ormai non riguardano più la sola epistemologia ed entrano a pieno titolo nel campo della scienza.

[*in ricordo di mia mamma*]

Bibliografia: [1] P. Campogalliani, *Prima di Einstein: quieto, moto e relatività*, La Scuola, Brescia, 1983; [2] R. Havemann, *Dialettica senza dogma*, Einaudi, Torino 1966; [3] M. Jammer, *Storia del concetto di spazio*, Feltrinelli, Milano, 1954 (con una premessa di A. Einstein); [4] I. Newton, *Philosophiae naturalis principia mathematica*, UTET, Torino, 1965; [5] F. Speranza, *Alcuni nodi concettuali a proposito dello spazio*, L'Educazione matematica, v.1, 1995, pp. 95-115.

Sull'integrale di 1/ln(x)

di Arnaldo Vicentini

È noto che la densità locale media di numeri primi nei dintorni di x tende asintoticamente a 1/ln(x); onde, detto $\pi(m,n)$ il numero di numeri primi compresi tra m incluso ed n>m escluso, questo vale approssimativamente [B.1]:

$$\pi^*(m,n) = \int_m^n \frac{1}{ln(x)} \cdot dx$$

Una primitiva F(x) di 1/ln(x) si ricava facilmente (secondo la traccia seguente) sviluppando $x=e^{\ln(x)}$ in serie di potenze di ln(x):

$$\frac{1}{ln(x)} = \frac{exp[ln(x)]}{x \cdot ln(x)} = \frac{1}{x \cdot ln(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[ln(x)]^k}{k!} =$$

$$\frac{1}{x \cdot ln(x)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{[ln(x)]^{k-1}}{k!} = D\left\{ ln[ln(x)] + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[ln(x)]^k}{k \cdot k!} \right\}$$

La routine in TurboPascal che segue, implementa appunto per tale via il calcolo dell'integrale $\pi^*(m,n)$.

```
Function PI_STAR(m,n:real):real;
 Function F(x:real):real;
  var y,z,new_p,old_p,k:real;
    begin
      y:=ln(x); new_p:=ln(y); z:=1; k:=0;
       repeat
        old_p:=new_p; k:=k+1; z:=y*z/k; new_p:=old_p+z/k
       until (old_p=new_p);
      F:=new_p
    end;
  begin
    PI_STAR:=F(n)-F(m)
  end;
```

La tabella seguente porge il confronto tra $\pi(m,n)$ e la sua stima $\pi^*(m,n)$ per alcuni intervalli m-n.

m-n	π(m,n)	π*(m,n)
1.000.000-1.020.000	1472	1446,61
1.020.000-1.040.000	1433	1444,56
1.040.000-1.060.000	1429	1442,56
1.060.000-1.080.000	1438	1440,56
1.080.000-1.100.000	1444	1438.68
1.100.000-1.120.000	1452	1436.80
1.000.000-1.120.000	8668	8649,79
(Errore relativo medio: ε_r = -0,210%		

Bibliografia: Encyclopaedia Britannica, Vol.18, voce "PRIME NUMBER".

Occhio!

La scienza secondo K. R. Popper

Abbiamo già presentato (numero 1) i postulati di Galileo Galilei sulla scienza (in forma sintetica ne abbiamo elencati 5). K. R. Popper alla luce delle nuove conoscenze, in particolare di quest'ultimo secolo, sviluppò un'idea di scienza basata su alcune fondamentali considerazioni:« 1) È facile ottenere delle conferme, o verifiche, per quasi ogni teoria, se quel che cerchiamo sono appunto delle conferme, 2) Le conferme dovrebbero valere solo se sono il risultato di previsioni rischiose; 3) Ogni teoria scientifica valida, è una proibizione: essa preclude l'accadimento di certe cose. Quanto più cose preclude, tanto migliore essa risulta; 4) Una teoria che non può essere confutata da alcun evento concepibile, non è scientifica: l'inconfutabilità di una teoria non è un pregio, come spesso si crede, bensì un difetto; 5) ogni controllo genuino di una teoria è un tentativo di falsificarla o di confutarla. La controllabilità coincide con la falsificabilità; 6) i dati di conferma non dovrebbero contare se non quando siano il risultato di un controllo genuino della teoria; 7) alcune teoria genuinamente controllabili, dopo che si sono verificate false, continuano essere sostenute dai loro fautori con l'introduzione *ad hoc* di qualche assunzione ausiliaria o con una reinterpretazione *ad hoc* della teoria, in modo da sottrarla alla confutazione (stratagemma convenzionalistico). Una tale condizione non può essere accettata e la teoria non ha più significato scientifico». Rispetto ai postulati galileiani la differenza sta nella diversa impostazione da dare alle verifiche di una teoria: qui abbiamo l'esigenza di una maggiore libertà nell'organizzare l'esperimento di verifica. La oggettività galileiana diventa libertà di azione di un ricercatore di creare uno esperimento atto a confutare la tesi. Per Popper non pare che sia importante il linguaggio che si usa nella scienza, né pare necessario che esista una verità da investigare (I postulato galileiano). Egli sottolinea che la «verità» di ogni singolo ricercatore deve avere alcune caratteristiche indispensabili perché possa essere considerata verità scientifica. L'idea che la natura abbia leggi e modelli scopribili tramite processi sperimentali viene confutata da quella corrente di pensiero che va sotto il nome di strutturalismo. (L.C.)

Bibliografia: I 7 punti sono tratti pari pari da Karl R. Popper, Congetture e confutazioni, il Mulino, 1972, Bologna, pp. 66-67.