MATHESIS

Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche

Fondata nel 1895

Sezione di Verona

Redazione: Luciano Corso, Luigi Marigo, Elisabetta Capotosto – Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045)8344785 - Numero 4 – maggio 1998

Il paradosso delle n-sfere [B.1]

di Arnaldo Vicentini

1. Le n-sfere

Nello spazio euclideo n-dimensionale S_n, la n-sfera di raggio r è il luogo dei punti distanti r da un dato punto detto centro. Rispetto al riferimento cartesiano ortogonale isometrico $o(x_1,\dots,x_n)$, l'equazione della n-sfera di raggio r e centro O è:

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = r^2 \qquad [1.1]$$

La 1-sfera di raggio r è la coppia di punti frontiera di un segmento lungo 2r. La 2-sfera di raggio r è la circonferenza di raggio r, frontiera di una parte di piano ampia $\pi \cdot r^2$. La 3-sfera è la superficie della sfera di raggio r, frontiera di una parte di spazio di volume $4\cdot\pi\cdot r^3/3$. Si dimostra (per induzione su n) che il volume $V_n(r)$ e l'area della superficie $\Sigma_n(r)$ d'una n-sfera di raggio r, cioè la misura della parte π_n di S_n i cui punti distano $d \le r$ dal centro della n-sfera e la misura (n-1)-dimensionale della frontiera di π_n valgono rispettivamente:

$$V_n(r) = \frac{\pi^{(n/2)}}{\Gamma(n/2+1)} \cdot r^n \quad ;$$

$$\Sigma_n(r) = \frac{dV_n(r)}{dr} = \frac{n}{r} \cdot V_n(r) \quad . \qquad [1.2]$$

In queste formule:

$$[n = 2 \cdot m] \Rightarrow [\Gamma(n/2+1) = \Gamma(m+1) = m!]$$

$$[n = 2 \cdot m + 1] \Rightarrow [\Gamma(n/2+1) = \Gamma(m+1+1/2)]$$

$$\Gamma(m+1+1/2) = \frac{(2m+1)\cdot \dots \cdot 3 \cdot 1}{2^m} \cdot \sqrt{\pi} =$$

$$= \frac{(2m+1)!}{2^{2m} \cdot m!} \cdot \sqrt{\pi}$$

E' facile sincerarsi della bontà delle formule [1.2] per n= 2 e n=3.

2. Il paradosso

Dividiamo un quadrato di lato 4r in 4 quadrati di lato 2r e inscriviamo in ciascuno un cerchio di raggio r [fig. 1]. Al centro del quadrato c'è posto per un cerchio, tangente a tutti gli altri quattro, di raggio $r_c=(\sqrt{2}-1)\cdot r$. Dividiamo un cubo di spigolo 4r in 8 cubi di spigolo 2r e inscriviamo in ciascuno una sfera di raggio r. Al centro del cubo c'è posto per una sfera, tangente a tutte le altre 8, di raggio $r_c=(\sqrt{3}-1)\cdot r$. In generale, dividiamo un n-cubo di spigolo 4r in 2^n n-cubi di spigolo 2r e inscriviamo in ciascuno una n-sfera di raggio r. Al centro dell'n-cubo c'è posto per una n-sfera, tangente a tutte le altre 2n, di raggio $r_c= (\sqrt{n}-1)\cdot r$. Ma cosa succede al crescere di n? Già per n=4, la 4-sfera centrale ha raggio uguale a quello delle altre 16. Per n=9, la 9-sfera centrale ha raggio $r_c=2r$, doppio del raggio delle altre 512 e perciò risulta tangente a ciascuna delle 18 facce del 9-cubo. Infine, per n>9, la n-sfera centrale sporge da ciascuna delle 2n facce dell'n-cubo avendo raggio $r_c>2r$.

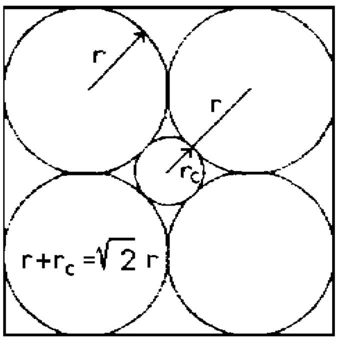

Fig. 1. Cerchio centrale (tangente ai 4 cerchi di raggio r) di raggio $r_c=(\sqrt{2}-1)\cdot r$.

Bibliografia: R. W. Hamming, *Coding and information theory*, Prentice-Hall. Inc., 1980 (Cap. 9, pagg. 164-169).

Formula di integrazione di Romberg

di Gianfranco Pezzo

Questa formula è utile per migliorare il risultato numerico *I[h]* dell'integrale *I* di una data funzione *y=f(x)* sull'intervallo [a,b]; tale risultato può essere ottenuto impiegando la regola dei trapezi ad n intervalli di ampiezza *h=(b-a)/n* arrivando a:

$$I[h] = \sum_{k=0}^{n-1} [f(a+kh) + f(a+(k+1)h)] \cdot \frac{h}{2}.$$

Dunque il risultato esatto I dell'integrale è *I=I[h]+E[h]*, in cui *E[h]* è l'errore di integrazione numerica rappresentato da

$$E(h) \cong -\frac{b-a}{12} \cdot h^2 \cdot f''(\mu) \qquad [B1]$$

(μ è un opportuno punto interno all'intervallo di integrazione [a,b]).

Se ora calcoliamo I con due valori n_1 ed n_2 di n (e quindi con i valori h_1 e h_2 di h) avremo che:

$$I(h_1) + E(h_1) = I(h_2) + E(h_2) \qquad (*)$$

in cui, per la formula dell'errore poc'anzi ricordata, $E(h_1)$ e $E(h_2)$ sono tali che:

$$\frac{E(h_1)}{E(h_2)} \cong \frac{{h_1}^2}{{h_2}^2}$$

(per h opportunamente piccoli, $f''(\mu)$ è da ritenersi costante), ossia:

$$E(h_1) \cong E(h_2) \cdot \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2$$

Sostituendo nella (*)

$$I(h_1) + E(h_2) \cdot \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2 \cong I(h_2) + E(h_2)$$

si ottiene:

$$E(h_2) \cong \frac{I(h_1) - I(h_2)}{1 - (h_1/h_2)^2}.$$

Tale valore approssimato di $E(h_2)$ può essere usato per avere un valore più accurato dell'integrale I:

$$\hat{I} = I(h_2) + \frac{I(h_1) - I(h_2)}{1 - (h_1/h_2)^2}$$

Questo metodo di miglioramento del risultato che sfrutta due valori già ottenuti per ottenerne un 3° va sotto il nome di "ESTRAPOLAZIONE di RICHARDSON" e nel caso dell'integrazione numerica viene applicata a valori dell'integrale che si ottengono dimezzando successivamente l'intervallo [a,b].

Se $h_2 = h_1/2$, al primo livello di estrapolazione che sfrutta un solo dimezzamento di [a,b] si avrà:

$$\hat{I} = I(h_2) + \frac{I(h_2) - I(h_1)}{4^1 - 1}$$

ossia:

$$\hat{I} = \frac{4}{3} \cdot I(h_2) - \frac{1}{3} \cdot I(h_1) \qquad (**)$$

Eseguendo un ulteriore dimezzamento di [a,b] si potrà calcolare anche $I(h_4)$ e questo potrà essere sfruttato assieme a $I(h_2)$ per avere, sempre al livello 1 di estrapolazione, un nuovo valore dato da:

$$\hat{I} = \frac{4}{3} \cdot I(h_4) - \frac{1}{3} \cdot I(h_2) \qquad (***)$$

I valori (**) e (***) possono essere usati per alzare il livello di estrapolazione ottenendo:

$$\hat{I} = I^{***} + \frac{I^{***} - I^{**}}{4^2 - 1}$$

ossia:

$$\hat{I} = \frac{16}{15} \cdot I\left(h^{***}\right) - \frac{1}{15} I\left(h^{**}\right)$$

Questi risultati possono essere generalizzati dalla "**FORMULA di INTEGRAZIONE di ROMBERG**":

$$\boxed{I_{j,k} = \frac{4^j \cdot I_{j-1,k} - I_{j-1,k-1}}{4^j - 1}} \qquad j = 2,3,4,....,n \ ; \quad k = 2,....,i$$

in cui $I_{j,k-1}$ e $I_{j-1,k-1}$ sono rispettivamente il più preciso e il meno preciso fra i valori degli integrali e $I_{j,k}$ è l'integrale migliorato (k è il livello di integrazione e j serve per distinguere il valore più preciso (j+1) da quello meno preciso (j) e $I_{j,k}$ è il valore migliorato).

Seguirà un'applicazione eseguita al calcolatore con il programma MATHEMATICA.

Bibliografia: [B.1] S. Chapra, R. Canale, *Metodi Numerici per l'ingegneria*, McGraw-Hill - Milano,1988, pag.461.

Una "querelle" didattica

di Luigi Marigo

Si verifichi, in base alla definizione, che

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x+1}{x-1} = 2.$$

Imposte le disuguaglianze

$$2 - \varepsilon < \frac{2x+1}{x-1} < 2 + \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < \frac{3}{x-1} < \varepsilon$$

si tratta di risolverle. Poiché la questione è posta in un intorno I di $+\infty$, basta scegliere I=[a,$+\infty$) con a>1 perché sia 3/(x-1)>0: la disuguaglianza -ε<3/(x-1) è pleonastica e si risolve solo l'altra: 3/(x-1)<ε. Il risultato è x>1+(3/ε). Pertanto, $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ N \geq 1+(3/\varepsilon) \mid \forall\ x>N$ è

$$2 - \varepsilon < \frac{2x+1}{x-1} < 2 + \varepsilon$$

e la verifica è fatta.

Questo tipo di svolgimento è contestato da numerosi docenti i quali esigono che le disequazioni siano risolte integralmente, sostenendo che, se ci si pone *a priori* in un intorno di $+\infty$, viene inficiata la validità stessa della verifica. Mi permetto di difendere il mio punto di vista.

Affrontando la questione dei limiti, i manuali esordiscono così: «è data una funzione definita in (a,b), x_0 al più escluso, in [a,$+\infty$) …» per cui ci si pone *a priori* in determinati intorni, e nulla vieta che questi siano scelti in modo da assicurare la permanenza del segno di talune espressioni, con conseguente notevole semplificazione delle disequazioni. Aggiungo che, prescrivendo la integrale e acritica soluzione delle disequazioni, si obbligano gli studenti a calcoli complicati e dispersivi e li si esonera, al tempo stesso, da ogni riflessione sulle recondite implicazioni della definizione di limite, sobria e apparentemente vuota: in altre parole, viene meno lo scopo per cui tali esercizi sono assegnati. Senza dimenticare che si può essere ancor più sbrigativi, ponendo, ad esempio,

$$\frac{3}{x-1} < \frac{6}{x} < \varepsilon \quad (\forall x > 2)$$

per cui è N=6/ε e non più N=1+(3/ε); ma la definizione si accontenta di "un numero N tale che…" e non pretende "proprio quel numero N tale che…".

Bibliografia: T. M. Apostol, *Calcolo: analisi 1*, Bollati Boringhieri, Torino, 1985 - G. Zwirner, *Complementi di algebra e nozioni di analisi matematica*, Cedam, Padova, 1985.