MATHESIS

Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche
Fondata nel 1895

Sezione di Verona

Redazione: Luciano Corso, Luigi Marigo, Elisabetta Capotosto – Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045)8344785 - Numero 5 – giugno 1998

Il piano di Fano

di Luciano Corso

Consideriamo uno spazio topologico finito costituito da 7 punti. In questo spazio si possono identificare 2^7= 128 parti distinte (corrispondenti all'insieme delle parti), ognuna delle quali rappresenta una particolare «figura geometrica». Il sistema di figure possibili è finito. Tra queste figure si possono identificare delle «rette»: si tratta di vedere cosa si deve intendere per rette. Le rette, per esempio, possono essere oggetti costituiti di 3 punti che godono di specifiche proprietà. È il particolare tipo di geometria che definisce le proprietà di determinate figure geometriche (nel nostro caso le rette). Per esempio, un piano proiettivo finito di 7 punti (si veda la figura) è un particolare spazio topologico dove le rette devono rispettare opportune condizioni.

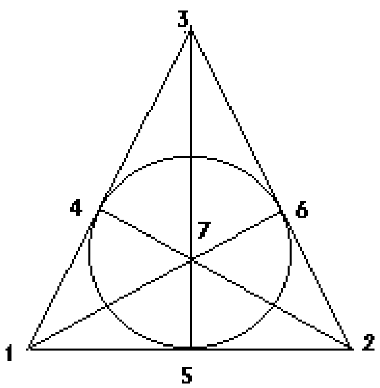
Diamo una definizione di piano proiettivo e poi andiamo a vedere quante rette possibili distinte si possono avere in questo piano. Consideriamo un insieme di n punti $\Sigma=\{P_1,P_2,\ldots,P_n\}$; un piano proiettivo finito di ordine q dovrà rispettare i seguenti assiomi:

I_1) Se $P\in\Sigma$ e $Q\in\Sigma$ e $P\neq Q$, allora esiste una sola retta r per cui $P\in r$ e $Q\in r$;

I_2) Se $r_1\subset\Sigma$ e $r_2\subset\Sigma$ e $r_1\neq r_2$, allora esiste un P per cui $P\in r_1$ e $P\in r_2$ (con il simbolo r_i si indica l'i-esima retta);

I_3) Esistono quattro punti che determinano a due a due (in forza di I_1) sei rette distinte;

I_4) Esiste una retta che consiste di q+1 punti, dove q>1 è un opportuno intero positivo.



Diamo un esempio di piano proiettivo finito di 7 punti e 7 rette (piano di Fano):

Se esiste una retta che consiste di q+1 punti, allora le rette sono $(q+1)q+1=q^2+q+1$ e così pure sono i punti. La verifica è facile e si omette. Per q=2 le rette distinte in questo piano sono $2^2+2+1=7$ e sono costituite da 3 punti; esse sono {1,3,4}, {1,2,5}, {1,6,7}, {2,3,6}, {2,4,7}, {3,5,7}, {4,5,6}. Tutte le terne di punti distinte da queste, non possono essere considerate rette perché non rispettano gli assiomi I_1,I_2,I_3,I_4. Esse quindi sono «figure geometriche» diverse. Il piano di Fano e in genere i piani proiettivi sono importanti non solo perché rappresentano esempi di geometrie non euclidee, ma soprattutto perché sono le basi di quello che va sotto il nome di progettazione degli esperimenti. In statistica sperimentale lo studio di questi piani è la premessa di ogni ricerca sperimentale.

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
r_1	1	0	1	1	0	0	0
r_2	1	1	0	0	1	0	0
r_3	1	0	0	0	0	1	1
r_4	0	1	1	0	0	1	0
r_5	0	1	0	1	0	0	1
r_6	0	0	1	0	1	0	1
r_7	0	0	0	1	1	1	0

Bibliografia: Ferenc Kàrteszi, Introduzione alle geometrie finite, Feltrinelli, 1978, Milano; Cerasoli, Eugeni, Protasi, Elementi di matematica discreta, Zanichelli, 1988, Bologna.

Riforma della scuola media superiore

di Luciano Corso

Viviamo in un mondo pieno di informazioni. In questo grande mare si muovono i nostri ragazzi, e noi stessi. Più che mai in questo mondo è bene disporre di strumenti selettivi in grado di selezionare le informazioni utili da quelle inutili o addirittura dannose. Poiché la nostra memoria è limitata, bisogna anche creare una gerarchia di valori sulle informazioni ricevute e ricordarle rispettando un certo ordine di importanza.

Una scuola è tanto più efficiente ed efficace nel conseguimento dei suoi obiettivi, quanto più riesce a dare agli studenti capacità selettive sulle informazioni che ricevono. Essa deve essere un laboratorio nel quale uno studente si esercita ad adoperare bene le proprie capacità mentali, ad organizzare un corretto ragionare, a vedere dentro nelle cose separandole in categorie omogenee per genere e specie, scartando quei generi e quelle specie che possono nuocere. A scuola non si può fare e sapere tutto perché si rischia di fare male, molto male, ogni cosa. In questo laboratorio ognuno deve essere libero di scegliere i suoi strumenti preferiti di lavoro. Chi opta per corsi di formazione linguistico-storico-letteraria, chi invece preferisce usare strumenti artistici, chi si indirizza per discipline scientifico-metodologiche, chi va verso studi di natura scientifico-tecnologica e chi invece sceglie discipline giuridiche. Nascono perciò le specializzazioni e sono tutte degne di rispetto, perché ciascuna è «umanistica». Nessuno sa quale percorso formativo è migliore di un altro e tutti possono arrivare a conoscere Platone senza aver fatto per forza un liceo; così come è possibile che da studi classici si arrivi a padroneggiare le regole per la progettazione e la costruzione di un motore. La scuola serve a formare lo studente secondo gli obiettivi che abbiamo esposto, solo se si lavora su contenuti. I contenuti sono sistemi coerenti ed organizzati di nozioni idonei a permettere di svolgere con competenza un compito. Senza contenuti non si possono formare abilità. Per tutto ciò è bene lasciare le specializzazioni che già esistono, senza pretendere il livellamento dei "saperi" e dei percorsi cognitivi dei singoli studenti. Conviene insegnare bene poche cose coerenti tra loro per specie, se è vero che la scuola deve formare criticamente e rigorosamente il cittadino di domani.

Invece, dominano idee pericolose nei riformatori della scuola italiana.

(1) Si vogliono introdurre ad oltranza nuove discipline, nei vari indirizzi di specializzazione, discipline che spesso non c'entrano con le specializzazioni curricolari e riducono lo spettro d'azione delle materie di specializzazione. È un pullulare disorganico di discipline: diritto, economia, arte, filosofia, storia della resistenza, educazione alla salute, educazione stradale, educazione alla legalità, ecologia e altre. L'intenzione è buona perché così si vorrebbe aumentare il bagaglio culturale degli studenti; il risultato è uno solo: si riducono i contenuti delle diverse discipline e aumenta la genericità accompagnata dalla confusione nella testa dei nostri giovani.

(2) Si considera la cultura come un'entità idealistica distaccata dai problemi e dalle procedure degli uomini che devono dare risposta ai loro bisogni, fine a se stessa, vissuta e vivente nella mente di spiriti eletti che non hanno necessità di sperimentare per conoscere, il cui percorso cognitivo può far a meno di passare attraverso il contatto con la materia, con i meccanicismi delle procedure. Così si creano gerarchie sugli indirizzi di studio: chi fa studi classici è migliore degli altri. Ma ciascun essere umano deve poter scegliere e fare il proprio percorso formativo.

(3) Occorre abbassare il rigore della scuola, il livello dei contenuti di ogni singola disciplina, poiché è alto l'insuccesso scolastico. Molti ritengono che forse si pretende troppo dagli studenti, e quindi si ritiene giusto un adeguamento delle difficoltà alle capacità degli studenti.

(4) La preoccupazione di adeguare la formazione di uno studente alle esigenze del mondo del lavoro fa deviare dagli obiettivi dell'attività docente che non ha come scopo la preparazione dei giovani a svolgere un particolare lavoro. Il dialogo con le associazioni industriali e artigianali è difficile perché esse chiedono un uomo diverso da quello che prepara la scuola. Ma un qualsiasi lavoro si può apprendere in 3 mesi di tirocinio se si ha una buona preparazione teorica di supporto.

(5) Si sostiene spesso che la scuola non prepara al proseguimento degli studi universitari. La tesi, di dubbio fondamento, spinge verso adeguamenti avanzati o onnicomprensivi dei programmi disciplinari: in ogni caso ciò è fuorviante. In realtà, gli studenti capaci di analisi e di critica possono coprire facilmente eventuali lacune nella loro formazione e seguire poi con profitto un qualsiasi corso di studi universitario.

(6) Si ritiene doveroso un controllo sull'attività di ogni singolo docente. È impensabile infatti che un'attività così importante e delicata per la società possa essere lasciata all'arbitrio di ognuno. Ma chi deve controllare e che cosa si deve controllare? Qui occorre dire subito che non si possono accettare controlli basati sul tempo che uno passa a scuola, né su un'autocertificazione dei docenti, né esclusivamente sul lavoro svolto nel settore della didattica senza tenere conto dei contenuti, né sul numero di promossi nella materia sul totale degli alunni. Occorre mettersi d'accordo, ma è certo che i corsi di aggiornamento organizzati dalle Università e da certi enti morali (esempio MATHESIS) sono sicuramente validi a fungere da controllo sulle attività di aggiornamento dei docenti, mentre altri corsi - purtroppo accreditati anche dai Provveditorati agli Studi - sono privi di ogni serio aggancio alle materie di insegnamento e non possono essere accettati come aggiornamento dei docenti, né tanto meno come strumenti di controllo della serietà con cui un docente impara le cose e le insegna.

Un quesito interessante

di Arnaldo Vicentini

È molto nota la serie di Eulero (B.1)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}=1{,}644934... \qquad (1)$$

Poco nota, eppure notevole, è la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}=\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{\pi}{\tanh(\pi)}-1\right]=1{,}076674... \qquad (2)$$

Che questa serie converga è ovvio; ma il calcolo del suo limite è piuttosto laborioso. Se sai calcolarlo, pur non avendo mai incontrato la serie, allora meriti 30 e lode in analisi. Se sei curioso di conoscere il tortuoso percorso che conduce alla (2), … ti diamo una mano dicendoti che per qualsiasi x>0 risulta:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+(x-nX)^2}=\frac{\pi}{X}\cdot\frac{\sinh\left(\frac{2\pi}{X}\right)}{\cosh\left(\frac{2\pi}{X}\right)-\cosh\left(\frac{2\pi}{X}\cdot x\right)} \qquad (3)$$

Nella (3) si può notare a sinistra una sequenza di funzioni f(x-nX) (con $n\in Z$), ottenute da $f(x)=1/(1+x^2)$ mediante la traslazione $x\to x-nX$. La loro somma è dunque una funzione continua periodica di periodo X: quella di destra appunto. Supposta vera la (3), per x=0 e X=1 si trova il caso particolare:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}=\pi\cdot\frac{\sinh(2\pi)}{\cosh(2\pi)-1}=\pi\cdot\frac{\cosh(\pi)}{\sinh(\pi)} \qquad (4)$$

Invitiamo i lettori a cimentarsi nel trovare la prova della (3) e a spedircela entro un mese. A tal fine consigliamo di ripassare le Fourier-trasformate. La risposta migliore sarà pubblicata.

Bibliografia: (B.1) A. Vicentini, «A proposito di π», Atti Mathesis, Congresso di VR, 1996.