MATHESIS

Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche

Fondata nel 1895

Sezione di Verona

Redazione: Luciano Corso, Luigi Marigo, Elisabetta Capotosto – Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045)8344785 - Numero 6 – luglio 1998

Tira e incurva!

di Luciano Corso

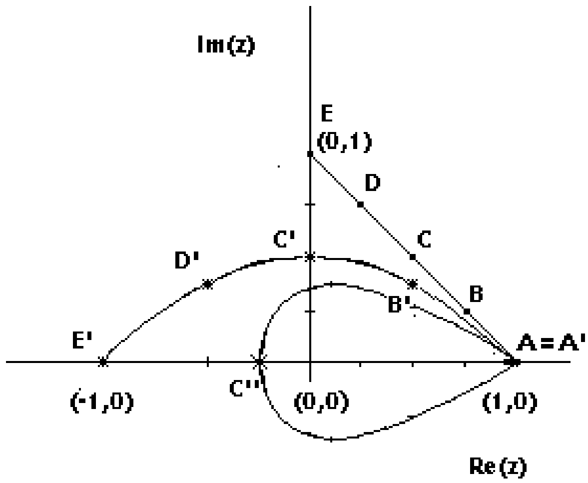
Siamo nel campo complesso e lì, ogni volta che ti muovi, tutto gira, tanto che ti viene il mal di testa, a volte. Il campo complesso ci impone in qualche modo di ruotare e ci dobbiamo adattare, altrimenti sono guai. Ciò accade quando applichi una trasformazione ad un insieme di punti e tu sai che tutti gli oggetti del mondo fisico sono insiemi di punti. Metti, per esempio, un'asta in campo complesso e appoggiala sull'asse Re(z) in coordinate complesse (1;0) e sull'asse Im(z) in coordinate complesse (0;1). Poi applica la trasformazione: $f{:}z \rightarrow z^2$; dove se $z=x+i\cdot y$ si ottiene $f(z)=(x^2-y^2)+i\cdot(2xy)$: la parte reale è $Re(z)=(x^2-y^2)$ e quella immaginaria è $Im(z)=2xy$. Sai che succede a questa barra?

Guarda (vedere la figura insieme alla tabella che de-

z	(1,0)	$\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right)$	$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right)$	(0,1)
f(z)	(1,0)	$\left(\frac{1}{2},\frac{3}{8}\right)$	$\left(0,\frac{1}{2}\right)$	$\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{8}\right)$	(-1,0)
ff(z)	(1,0)	$\left(\frac{7}{64},\frac{6}{16}\right)$	$\left(-\frac{1}{4},0\right)$	$\left(\frac{7}{64},-\frac{6}{16}\right)$	(1,0)

scrive i risultati di due trasformazioni in sequenza su 4 punti), è come se tu la tirassi e la incurvassi ed essa si potesse adattare a queste sollecitazioni:

Ottieni un bel arco (dalla 1ª trasformazione), utile, magari, a scagliare lontano le tue frecce d'amore. E se



applichi di nuovo la trasformazione, l'arco si richiude su se stesso e diventa un cappio buono da imprigionare il tuo amore per sempre. Vedi quante cose belle puoi fare con semplici trasformazioni in campo complesso? Prova tu a inventartene una.

Bibliografia: Vi sono parecchi testi di analisi nel dominio C. Consiglio come base il seguente testo: ML. Krasnov, A. I. Kiselev, G. I. Makarenko, Funzioni di una variabile complessa e loro applicazioni, Edizioni MIR, Mosca, 1987.

Soluzione del quesito interessante

di Arnaldo Vicentini

Si veda il foglio n.5. In generale, una sequenza di funzioni

$$S(x,X)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x-n\cdot X) \qquad (1)$$

ottenute con la traslazione $x\rightarrow x-n\cdot X$ da una funzione f(x) impulsiva (integrabile cioè in ogni intervallo a da $-\infty$ a $+\infty$), è una funzione periodica in x di periodo X. Sia $F(i\omega)$ la Fourier-trasformata di f(x):

$$F(i\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x}\cdot f(x)\cdot dx = Re(\omega)+i\cdot Im(\omega). \qquad (2)$$

Dove f(x) è continua, risulta senz'altro:

$$f(x)=\frac{1}{2\cdot\pi}\cdot\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x}\cdot F(i\omega)\cdot d\omega. \qquad (3)$$

Con ciò, dove S(x,X) è continua, posto:

$$M=\frac{Re(0)}{X};\ C_n=\frac{2}{X}Re\left(n\frac{2\pi}{X}\right);\ S_n=-\frac{2}{X}Im\left(n\frac{2\pi}{X}\right) \qquad (4)$$

lo sviluppo di S(x,X) in serie di Fourier dà:

$$S(x,X)=M+\sum_{n=1}^{\infty}\left[C_n\cdot cos\left(n\frac{2\pi}{X}x\right)+S_n\cdot sin\left(n\frac{2\pi}{X}x\right)\right] \qquad (5)$$

Se $F(i\omega)$ è pari in ω [$Im(\omega)=0$], allora f(x) è pari in x e viceversa: e $S_n=0\ \forall$ n. Per $F(i\omega)=\pi\cdot e^{-|\omega|}=Re(\omega)$, dalla (3) si ricava:

$$f(x)=\int_0^{\infty} e^{-\omega}\cdot cos(\omega\cdot x)\cdot d\omega=\frac{1}{1+x^2} \qquad (3bis)$$

È da notare che la (3bis) equivale a stabilire che:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\omega x}}{1+x^2}dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{cos(\omega x)}{1+x^2dx}=\pi e^{-|\omega|}. \qquad (2bis)$$

Per tale f(x) e X>0, dalle 1,4 e 5 abbiamo:

$$S(x,X)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+(x-nX)^2}; \qquad (1bis)$$

$$M=\frac{\pi}{X};\quad C_n=\frac{2\pi}{X}e^{-2n\pi/X};\quad S_n=0; \qquad (4bis)$$

$$S(x,X)=\frac{\pi}{X}+\frac{2\pi}{X}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-2n\pi/X}\cdot cos\left(n\frac{2\pi}{X}x\right). \qquad (5bis)$$

Essendo $cos(\alpha)=(e^{i\alpha}+e^{-i\alpha})/2$, l'ultima serie è calcolabile come somma di due serie geometriche; donde la tesi del quesito, cioè:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+(x-nX)^2}=\frac{\pi}{X}\,\frac{sinh\left(\frac{2\pi}{X}\right)}{cosh\left(\frac{2\pi}{X}\right)-cosh\left(\frac{2\pi}{X}x\right)}. \qquad (6)$$

L'aggiornamento dei docenti

di Luigi Marigo

Nell'articolo sulla riforma della scuola media superiore di Luciano Corso (foglio n.5), egli conclude con una decisa critica a quello che i Provveditorati agli Studi intendono per aggiornamento dei docenti. Se quello che Corso ha scritto s'intende preso alla lettera, allora mi permette di dissociarmi, perché la professione di insegnante è complessa e non si può prescindere da una conoscenza, sempre aggiornata, della struttura scolastica, delle norme in vigore, delle prassi in uso, delle metodologie didattiche, dei fondamenti della pedagogia e dello sviluppo della società di cui gli studenti sono figli. Se però Corso intende deprecare l'opinione, purtroppo ormai corrente, che sia inutile l'aggiornamento sulle specifiche discipline di insegnamento, allora sono pienamente d'accordo: se si concorda che gli studenti siano a scuola non in parcheggio, ma per acquisire specifiche conoscenze, allora l'aggiornamento disciplinare diventa un passaggio fondamentale e necessario. Per lo più si dà per scontato che laurea, abilitazione, concorso siano garanzia di preparazione disciplinare: della preparazione libresca certamente sì, ma con la preparazione libresca da sola si fa poca strada nell'insegnamento; mi sembra che senza una continua e viva curiosità attorno al proprio sapere, senza il desiderio di trasmetterlo a quelli cui siamo tenuti, per professione, senza la voglia di accapigliarsi con amici e colleghi su una definizione ambigua o sulla interpretazione di un passo letterario, il resto sia lettera morta.

Sulle trasformazioni reversibili

di Luigi Marigo

Il 2° principio della Termodinamica sancisce l'irreversibilità dei fenomeni macroscopici, originata dalla irreversibile tendenza microscopica alla distribuzione uniforme dell'energia.

Sono noti due enunciati del 2° principio:

1) Enunciato di Kelvin: è impossibile ogni processo il cui *unico* risultato sia la trasformazione in energia meccanica di una quantità di calore prelevata da una sorgente isoterma (aspetto permissivo: ogni quantità di energia meccanica può trasformarsi in calore, spontaneamente e senza ulteriori effetti).

2) Enunciato di Clausius: è impossibile ogni processo il cui *unico* risultato sia il trasferimento di una quantità di calore da una sorgente isoterma ad un'altra a temperatura superiore (aspetto permissivo: ogni quantità di calore può passare da una sorgente a un'altra a temperatura inferiore, spontaneamente e senza ulteriori effetti).

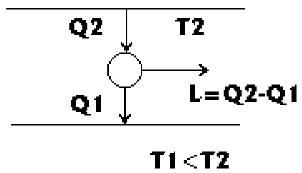
Può essere utile un ulteriore enunciato.

3) Enunciato del gas: è impossibile ogni processo il cui *unico* risultato sia la riduzione del volume di una massa gassosa (aspetto permissivo: una massa gassosa occupa tutto il volume disponibile, spontaneamente e senza ulteriori effetti).

I tre enunciati sono equivalenti.

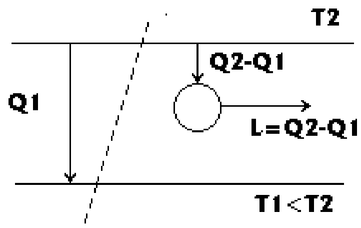
Si dice ora che una trasformazione è *reversibile* quando gli stati attraverso i quali passa il sistema differiscono per quantità infinitesime da stati di equilibrio, per cui una trasformazione reversibile può connettere solo stati di equilibrio e il suo andamento può essere invertito con una variazione infinitesima delle condizioni esterne. Affinché il sistema passi da uno stato di equilibrio a un altro, la trasformazione deve essere così lenta da durare un tempo infinito; se l'Universo fosse macroscopicamente reversibile, non accadrebbe nulla in tempo finito e il tempo resterebbe come congelato: può accadere qualcosa solo se accade irreversibilmente.

L'aggettivo *unico* degli enunciati significa che qualcosa di vietato può accadere, ma solo in concomitanza con qualcos'altro; per meglio chiarire la natura di questi fenomeni concomitanti pensiamo alle trasformazioni reversibili come insiemi di due processi paralleli, uno vietato da un enunciato del 2° principio e l'altro permesso da un diverso enunciato, in modo che la diminuzione di entropia nel processo vietato si compensi esattamente con l'aumento nel processo permesso. Pensiamo ad esempio a un ciclo di Carnot:



$$\Delta S_T=\Delta S_1+\Delta S_2=-\frac{Q_2}{T_2}+\frac{Q_1}{T_1}=0$$

e scomponiamolo fittiziamente in due processi paralleli



$$\Delta S_T=\Delta S_1+\Delta S_2=+\frac{Q_1}{T_1}-\left(\frac{Q_2-Q_1+Q_1}{T_2}\right)=0$$

Il processo a destra è una violazione dell'enunciato di Kelvin, quello a sinistra è permesso dall'enunciato di Clausius. Analogamente, si potrebbe pensare all'espansione reversibile isoterma del gas come l'insieme di due processi paralleli, uno vietato dall'enunciato di Kelvin, l'altro consentito dall'enunciato del gas. Il processo *permesso* spinge al futuro, quello *proibito* al passato: il loro ipotetico e astratto equilibrio, nella trasformazione reversibile, corrisponde alla stazionarietà, cioè al «congelamento» del tempo. L'esistenza della freccia del tempo e della storia dell'Universo da noi conoscibile è dovuta al prevalere dei processi permessi; questa prevalenza non è totale e, localmente nello spazio e nel tempo, avvengono processi proibiti con creazione di strutture e complessità.

Bibliografia: E. Fermi; Termodinamica, Boringhieri, Torino, 1958