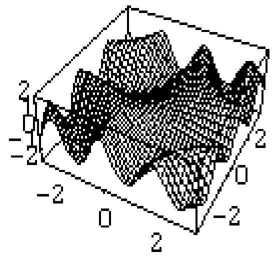
MATHESIS

Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche
Fondata nel 1895

Sezione di Verona

Redazione: Luciano Corso, Luigi Marigo, Elisabetta Capotosto – Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045)8344785 - Numero 7 – agosto 1998



Linguaggio, logica e paradossi

di Carlo Veronesi

Nello studio di un qualsiasi linguaggio (formale o naturale) si distinguono usualmente 3 livelli: grammaticale, sintattico e semantico.

Ognuno di noi, anche se ora insegna matematica, ricorda di aver fatto, a suo tempo, errori di grammatica (saltando qualche "h" all'interno di una parola) o errori di sintassi, sbagliando magari un congiuntivo di una frase.

La Grammatica, infatti, riguarda quel complesso di regole che, a partire da un insieme di segni elementari detti Alfabeto, governa la formazione delle parole. La Sintassi riguarda la formazione delle frasi. La Semantica, infine, è un complesso di riferimenti e di corrispondenze fra i segni del linguaggio e un insieme di oggetti o di situazioni extralinguistiche. Nella lingua comune le regole grammaticali e sintattiche sono molto informali e codificate solo in parte. Inoltre esse sono abbastanza indipendenti dalla semantica, nel senso che è possibile scrivere frasi sgrammaticate o sintatticamente scorrette, e tuttavia perfettamente comprensibili e significative. Viceversa, si possono pronunciare frasi corrette grammaticalmente e sintatticamente (es. "Il treno studia la geometria analitica"), ma dal significato assurdo o surreale.

I linguaggi della logica e della matematica sono immuni da queste imperfezioni. Per esempio, nel Calcolo delle Proposizioni, esiste una grammatica con regole che generano le formule ben formate (f.b.f.); ed esiste una sintassi che esplicita le Regole di Deduzione, in base alle quali, partendo da un nucleo ristretto di assiomi logici iniziali, si ricavano le altre Tesi logiche. Inoltre, l'apparato sintattico è strettamente collegato alla Semantica del Calcolo, nel senso che ogni Tesi logica è una Tautologia (cioè un'espressione comunque vera) e, viceversa, ogni Tautologia può essere derivata dall'apparato deduttivo.

Questa maggiore precisione del linguaggio della logica è possibile perché in logica (e spesso anche in matematica) interessa una porzione molto ristretta del significato, cioè il solo valore di verità. E tuttavia i linguaggi della logica e della matematica sono pur sempre derivati dalla lingua naturale, la cui ricchezza espressiva è portatrice di un'altra possibilità, che irrompe fastidiosamente anche all'interno della matematica, cioè la possibilità dell'autoriferimento. Famoso a questo proposito è l'antico paradosso del mentitore, che può assumere varie forme; per esempio se scriviamo:«Questa frase è falsa» ci imbattiamo in un'imbarazzante sfida al Principio di non contraddizione (infatti la proposizione virgolettata risulta vera se, e solo se, è falsa).

Un altro curioso paradosso è quello dell'aggettivo «eterologico». Un aggettivo sarà detto «autologico» se può essere riferito a se stesso, «eterologico» in caso contrario. Per esempio, l'aggettivo "breve" è autologico (perché è effettivamente breve), l'aggettivo "lungo" è invece eterologico; l'aggettivo "italiano" è autologico, invece l'aggettivo "francese" è eterologico. Se ora ci chiediamo se l'aggettivo "eterologico" sia esso stesso autologico od eterologico, ci mettiamo di fronte ad un altro interrogativo inestricabile.

Nella teoria (ingenua) degli insiemi è famoso il paradosso scoperto da B. Russell, che riguarda la natura autocontraddittoria dell'insieme $\{x | x \notin x\}$, cioè dell'insieme di tutti gli insiemi che non contengono se stessi come elemento. Una via d'uscita a questo paradosso è stata prospettata dallo stesso Russell con la cosiddetta *Teoria dei tipi*: in essa si distinguono, a livello più basso, entità individuali (di tipo 0), e poi insiemi di individui (di tipo 1), insiemi di insiemi (di tipo 2), ecc. La "Grammatica" pensata da Russell impone che, se a sinistra del simbolo $\in$ figura una entità di tipo n, a destra possa solo figurare una entità di tipo $n+1$. Un'altra via d'uscita, sostenuta dal matematico intuizionista-costruttivista Brouwer è più spostata verso la Semantica: secondo questo punto di vista alle affermazioni che riguardano insiemi infiniti e non costruibili (come l'insieme di Russell) non dobbiamo necessariamente attribuire un valore di verità.

Il metodo assiomatico, infine, segue una via che vorremmo definire "Sintattica", al fine di evitare i paradossi. In una teoria assiomatica degli insiemi (per esempio nel sistema di Zermelo-Fraenkel) non è più possibile passare ingenuamente da una qualunque frase aperta $P(x)$ all'insieme $\{x \mid P(x)\}$, col rischio di ricadere nel paradosso di Russell se si prende $P(x)= (x \notin x)$.

Gli insiemi ammissibili sono quelli che si possono ottenere con le operazioni precisate dagli assiomi.

Bibliografia: [1] N. Chomsky, Le strutture della sintassi, Bari, Laterza, 1970; [2] R. Rogers, Logica matematica e teorie formalizzate, Milano, Feltrinelli, 1979; [3] M. Borga e F. Furinghetti (a cura di), Il problema dei fondamenti della matematica, Genova, ECIG, 1986.

Documento sulla scuola *

di Tullio Leuzzi e Amelia Roncalli

La scolarizzazione di massa è stata una conquista sociale perché ha assicurato a tutti il raggiungimento di un certo grado di istruzione, ciò è avvenuto però a scapito della qualità di tale istruzione con conseguente livellamento verso il basso. Infatti, nonostante si possa riconoscere una buona preparazione ad alcuni diplomati, tuttavia il livello medio delle conoscenze dei diplomati diminuisce di anno in anno ed è ormai opinione diffusa negli ambienti universitari quella di considerare molti dei nostri diplomati come dei semianalfabeti. Questi sono gli effetti dannosi di una concezione ormai dominante, ben consolidata nella scuola primaria secondo la quale l'obbligo della frequenza conduce di pari passo al diritto alle promozioni, concezione ormai diffusa anche nella secondaria. Di qui il fenomeno delle promozioni facili che è estremamente accentuato soprattutto in certe scuole private ma che purtroppo è presente anche nelle scuole statali. Molti alunni, anche in presenza di gravi lacune, vengono di frequente promossi alla classe successiva tramite giudizi che, laddove non siano viziati dall'intendimento di promuovere comunque, traggono origine e da una didattica minimalista, risultato di una operazione di continuo abbassamento dei minimi di soglia da conseguire anno per anno per accedere alla classe successiva e da criteri di valutazione lassisti secondo i quali ci si accontenta spesso di richiedere allo studente una ripetizione mnemonica e acritica dei contenuti.

Non esistono d'altra parte seri controlli da parte delle autorità scolastiche volti ad evitare l'abbassamento della qualità dell'insegnamento e dell'offerta formativa, nonché ad accertare l'adeguatezza degli insegnanti all'esercizio della professione.

Le promozioni facili, frutto di una ideologia egualitaria, oltre a produrre una svalutazione dei titoli di studio conseguiti, sono a volte effetto e causa di scelte opportunistiche: quelle degli insegnanti giacché la promozione degli "asini", unitamente ai provvedimenti di inserire nei curricula un numero sempre maggiore di discipline, consente il mantenimento del numero delle cattedre e li mette al sicuro rispetto ad eventuali ricorsi estivi ai TAR da parte dei genitori, e quelle degli studenti che, promossi con il debito formativo, speculando sul perenne rinnovo di tale debito e confidando sul fatto che spesso a "saldare" il debito dello studente è il consiglio di classe (che ha la possibilità di condonarlo con una votazione e di non farlo neanche comparire sui documenti ufficiali), maturano una sempre più forte inclinazione verso la fuga dalle discipline più complesse che sono poi anche le più formative.

Con l'abolizione degli esami di riparazione è venuto meno uno strumento che induceva nello studente un processo di più diretta e maggiore responsabilizzazione ed era comunque più efficace per valutare il recupero degli svantaggi.

Nella nostra società la scuola, dalla primaria all'università, deve svolgere due compiti fondamentali: 1) fornire a tutti un'istruzione di base; 2) mantenere in vita e trasmettere le più alte forme del sapere. In tal modo è possibile contribuire efficacemente a conservare ed eventualmente ad incrementare il benessere raggiunto e a garantire i valori irrinunciabili della libertà e della democrazia. È quindi indispensabile che ogni individuo frequenti la scuola dell'obbligo e sia messo nelle condizioni di esercitare il diritto allo studio fino ai massimi livelli.

Nella situazione attuale siamo dolenti di constatare che è stata seriamente compromessa una delle funzioni scolastiche sopraddette, quella di trasmettere le più alte forme del sapere. La scuola in una società complessa e sviluppata come la nostra non può venir meno dall'assolvere anche questa funzione. È praticamente impossibile ad un giovane di normali capacità giungere ai massimi livelli del sapere e alle più alte specializzazioni senza avere alle spalle un adeguato e costante tirocinio in una scuola primaria e secondaria di buon livello. È pura illusione pensare che per raggiungere tale scopo si possano evitare impegno e sacrificio e che si possono conseguire abilità senza un'adeguata assimilazione dei contenuti disciplinari.

Allora il vero problema della scuola è quello di conciliare la formazione obbligatoria per tutti con la necessità di garantire fin dai primi anni di scuola secondaria un insegnamento di alto livello. Solo una scuola estremamente flessibile può risolvere tale problema. Non certo una scuola che, pretendendo di essere uguale per tutti, non può che conservare una certa rigidità ed essere all'insegna della superficialità e della concettualizzazione. Una tale scuola può favorire solo i mediocri, penalizzando sia i più deboli che i più dotati.
(continua al n. 8)

* *Il presente documento è stato elaborato da due soci della Mathesis della sezione di Bergamo. T. Leuzzi è docente di fisica presso l'ITIS "Natta" di Bergamo; A. Roncalli è docente di matematica presso lo stesso istituto.*

Il rispetto delle opinioni

Le opinioni espresse in questo foglio sulla politica scolastica, sulla ricerca scientifica, sull'educazione, sulla società in genere, sono del tutto personali e non vincolano in alcun modo l'associazione nei suoi indirizzi e nei suoi programmi, a meno che non siano controfirmati dal presidente o dal vicepresidente della sezione a nome del Consiglio direttivo.

Dalla funzione di Verhulst (logistica) all'insieme di Mandelbrot

di Luciano Corso

L'equazione differenziale

$$dX(t)/dt=a\cdot X(t)-b\cdot X^2(t) \qquad (1)$$

è l'equazione di Verhulst e descrive la crescita di una popolazione biologica al variare del tempo, con il vincolo che la capacità portante del territorio (k) sia finita. $X(t)$ è la popolazione al tempo t, a è il tasso di natalità della popolazione, $b=a/k$ è lo smorzatore e $k=Max[X(t)]$. Se si discretizza l'equazione di Verhulst si ottiene:

$$\Delta X_t=a\cdot X_t-b\cdot X_t^2. \qquad (2)$$

Si normalizza la popolazione ponendo $k=1$ e si ottiene facilmente:

$$\Delta x_t=a\cdot x_t\cdot(1-x_t) \qquad (3)$$

ove x_t è il valore normalizzato della popolazione presente in quel territorio. Quest'ultima espressione si può scrivere anche così:

$$x_{t+1}=x_t+a\cdot x_t\cdot(1-x_t). \qquad (4)$$

L'insieme di Mandelbrot nasce dalla seguente equazione alle differenze finite:

$$z_{t+1}=z_t^2+c \quad \forall t\in \boldsymbol{N}_0. \qquad (5)$$

A questo punto per dimostrare che la (4) e la (5) sono topologicamente coniugate (cioè equivalenti dal punto di vista topologico) basta porre:

$$c=(1-a^2)/4 \quad \text{e} \quad z_t=(1+a)/2-a\cdot x_t.$$

Infatti sostituendo otteniamo:

$$[(1+a)/2-a\cdot x_{t+1}]=[(1+a)/2-a\cdot x_t]^2+(1-a^2)/4;$$

e con facili semplificazioni si arriva alla equazione (4).

Il sistema (5) viene, quindi, definito nel campo complesso $\boldsymbol{C}$. Mandelbrot cerca quali punti di c sono attrattori per il sistema e quali no. $c\in\boldsymbol{C}$ è scomponibile in $Re(c)$ e $Im(c)$. Il sistema si studia nell'insieme di punti dato da

$$-2{,}25 \le Re(c) \le -0{,}75 \quad \text{e} \quad -1{,}5 \le Im(c) \le 1{,}5. \qquad (6)$$

Per ciascun punto di questo rettangolo si verifica se, dopo n passi (per n sufficientemente elevato) z_{n+1} è in fuga oppure no. Se z_{n+1} non si è sostanzialmente mosso rispetto a $z_{t=0}$ allora si evidenzia il punto di partenza dell'iterazione perché è un punto attrattore, altrimenti no. Si prosegue così per ogni punto dell'insieme considerato. Si ottiene alla fine la famosa figura dell'insieme di Mandelbrot [B.2. pag. 844].

Bibliografia: [B.1] Robert L. Devaney, An Introduction to Chaotic Dynamical Systems, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., New York, 1989 – [B.2] H. O. Peitgen, H. Jürgens, D. Saupe, Chaos and Fractals, Springer-Verlag, New York, 1992