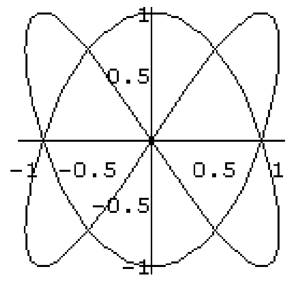
MATHESIS

Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche

Fondata nel 1895

Sezione di Verona

Redazione: Luciano Corso, Luigi Marigo, Elisabetta Capotosto – Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045)8344785 - Numero 10 - ottobre 1998



Sull'insegnamento della matematica

di Gianfranco Gambarelli *

(segue dal n. 9)

[…] ***La controriforma***. La soluzione sarebbe semplice: diminuire, anziché aumentare, il peso dei programmi della Media; a parità di ore, decidere quali sono gli argomenti fondamentali che tutti devono conoscere e lasciare ampio spazio perché tali argomenti possano essere facilmente metabolizzati attraverso esercizi ed esempi concreti, limitando il più possibile i carichi di lavoro e richiedendo le sole specializzazioni veramente indispensabili. Sarebbe poi compito dei corsi di diploma universitario e di laurea operare i raffinamenti più adatti. Ma la soluzione qui proposta è troppo ovvia per essere applicabile.

Una proposta di didattica personalizzata. Nel frattempo si stanno elaborando a livello ministeriale le nuove linee della riforma. Poiché tali linee non riguardano la sola Matematica, appare opportuno esaminare il problema da un punto di vista più generale: ecco il motivo di questo secondo capitoletto, ove si illustra una proposta di didattica indolore (anche per la componente matematica).

L'obiettivo. Obiettivo di questa proposta è costruire una organizzazione scolastica in grado di assicurare: una conoscenza di base minimale per tutti gli studenti; la garanzia per gli studenti più portati per particolari discipline, di poterle approfondire senza essere danneggiati da un forzato livellamento verso il basso.

La tabella dei livelli di apprendimento. Per ciascuna disciplina va compilata una tabella dei livelli di apprendimento, strutturata per anno di età dello studente, come nell'esempio sottoriportato (nota importante: ogni livello di approfondimento superiore al primo non deve anticipare argomenti di anni successivi).

La Commissione dei docenti di area. Viene istituita una commissione di docenti per area culturale comune, ma multidisciplinare (ad esempio, Matematica e Fisica, Lingue e Letteratura ecc.). Tale commissione assegnerà ad ogni studente il livello (delle singole materie dell'area di competenza della Commissione) in cui dovrà essere inserito nel periodo successivo. Ad esempio si riporta una tabella indicativa per la Matematica (per carità, chiedo ai lettori la cortesia di rinviare la discussione dei relativi contenuti).

età	livello		
	Minimo	Medio	Massimo
5			
…			
16	Diseq. I grado	Diseq. II grado	Diseq. Trigon.

L'assegnazione dei livelli. L'anno è diviso in periodi. Il primo periodo è molto breve e l'insegnamento è di livello medio. Alla fine di ciascun periodo ogni studente verrà assegnato ad un livello a lui adeguato dalla Commissione di area. Dopo due anni consecutivi di insufficienza in una materia, lo studente deve ripetere un anno.

Gli insegnanti di sostegno. Al di sotto del livello minimo verrà assegnato un insegnante di sostegno individuale per quella materia. Insegnanti di sostegno individuali andranno assegnati anche agli studenti che hanno difficoltà nei rapporti sociali (ex "7 in condotta"), in quanto essi devono danneggiare il meno possibile i ritmi di apprendimento della classe. Insegnanti per lezioni collettive di recupero andranno assegnati a quegli studenti cui venisse riconosciuta la potenzialità per risalire il livello.

Il problema dei docenti. Per la concreta applicazione di questa proposta v'è poi il problema dei docenti: occorre istituire corsi di pedagogia, ma soprattutto di applicazione delle varie discipline, per la stimolazione dell'interesse dello studente, occorre garantire la periodicità dei concorsi per evitare "la incompatibilità di un sistema che mentre proclama l'autonomia, e dovrebbe quindi mettere in concorrenza la validità delle diverse istituzioni scolastiche, continua ad affidare l'insegnamento a chiunque possa inserirsi in una graduatoria, capace o incapace che sia" [Natale Verdina, Il nuovo giornale di Bergamo, 30-5-'98, pag. 19]. Fra le numerose ulteriori riflessioni, vi sarebbe infine da considerare il processo di autocastrazione dei colleghi dei corsi di laurea in Matematica, che realizzano da molti anni sistematiche ecatombi studentesche, con il risultato che le iscrizioni sono ormai ridotte a poche decine di matricole e l'insegnamento della Matematica più importante, quella delle scuole medie, viene delegato a biologi, geologi e farmacisti…mah.

Ringraziamenti. Questo articolo riprende alcune mie precedenti osservazioni pubblicate su varie testate: Scuola e didattica, anno 36 n. 17, pagg. 14-35; La matematica e la sua didattica, anno 5 n. 4, pagg. 52-54; Atti del convegno nazionale sull'orientamento e il tutorato, Università di Udine, 19-21 febbraio 1998. Ringrazio quanti mi hanno contattato ed aiutato con critiche costruttive in seguito a tali letture. Ringrazio in particolare Luciano Corso e i seguenti soci Mathesis della sezione di Bergamo: Donatella Bertuzzi, Carmelo Campagna, Linda Cremonesi,, Mariella Crotti, Carmelita Fratus, Margherita Gamalero, Enza Inguaggiato, Tullio Leuzzi, Pietro Nava, Amelia Roncalli e Lidia Tiraboschi. Il loro aiuto è stato determinante per chiarirmi un poco le idee nella riedizione di questo elaborato, del quale mi dichiaro comunque unico (ir)responsabile.

** Gianfranco Gambarelli è docente ordinario di Matematica generale presso la Facoltà di Economia .e supplente di Analisi alla Facoltà di Ingegneria dell'Università degli Studi di Bergamo*

Essenzialismo e strumentalismo

di Luciano Corso

L'editore Osiander nell'introdurre il *De Rivolutionibus* di Copernico (anno 1543) non si sa se per prudenza, per paura o per profonda convinzione della validità delle nuove idee, scrive, tra l'altro, un passo destinato ad un ricordo perenne. Esso dice:« […]Non è necessario che tali ipotesi siano vere, o anche simili al vero, basta invece che diano luogo a calcoli concordanti con le osservazioni.[…]». In questa breve frase è contenuto tutta la profondità di pensiero di ciò che oggi va sotto il nome di strumentalismo.

A seconda della visione del mondo e della fiducia che ripongono nelle capacità umane, gli scienziati possono essere classificati in essenzialisti e strumentalisti. Gli essenzialisti (il cui punto di riferimento è il pensiero di G. Galilei – vedi foglio n.1) sono convinti che esistono comunque delle regolarità in natura, anche se l'uomo non è in grado di coglierle mediante il metodo sperimentale e che la funzione della scienza è di trovare tali regolarità. L'indeterminazione dei fenomeni naturali, non dipende dalle leggi che li governano, bensì dall'ignoranza dell'uomo che li analizza: se si potesse ipotizzare una situazione di perfetta conoscenza dei fattori che condizionano tali fenomeni, avremmo la possibilità di controllarli in ogni minimo dettaglio, senza possibilità di errore. Lo sforzo costante perciò è di creare sempre nuove conoscenze fino a che non si possa davvero padroneggiare le leggi di natura. Gli strumentalisti, invece credono che ciò che si interpreta come regolarità scientifica è solo una costruzione del pensiero, non una verità, ma un modello teorico, un'ipotesi di lavoro che trova una buona concordanza con i dati sperimentali. Il modello, quando concorda con ciò che si osserva, interpreta bene lo stato delle cose, ma la verità è altra cosa. Non è dato all'uomo comprendere l'essenza che governa il mondo: egli può solo limitarsi a osservarlo e, per costruzione mentale tentare di interpretarne le ipotetiche leggi, senza presunzione.

Se fino all'avvento della meccanica quantistica, l'essenzialismo fu la concezione dominante tra gli scienziati, dopo l'affermarsi delle nuove idee e lo sviluppo recente delle nuove teorie della complessità e del caos deterministico e stocastico l'orientamento prevalente della maggior parte del mondo scientifico è verso lo strumentalismo.

Così, paradossalmente, oggi le tesi del cardinal Bellarmino – grande accusatore di Galilei - sono più aderenti alle conoscenze scientifiche attuali di quelle di G. Galilei.

Bibliografia: Enzo Ballatori, Statistica e metodologia della ricerca, editore Galeno, Perugia, 1988

Una matrice esponenziale un po' strana

di Arnaldo Vicentini

Sia $\boldsymbol{A}$ una matrice quadrata costante. Detta $\boldsymbol{I}$ la matrice identità ed x una variabile scalare, la matrice esponenziale di $x\boldsymbol{A}$ è la matrice $Exp(x\boldsymbol{A})$ che verifica la legge dello sviluppo in serie di potenze della funzione esponenziale.

$$Exp(x\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{I} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \cdot \boldsymbol{A}^k \qquad (1)$$

come $e^{a \cdot x} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} a^k \cdot \frac{x^k}{k!}$.

Se $\boldsymbol{A}$ è diagonalizzabile, diciamo $\boldsymbol{A=MS_AM^{-1}}$, con $\boldsymbol{S_A}$ matrice diagonale degli autovalori di $\boldsymbol{A}$, allora da (1) si ottiene $\boldsymbol{Exp(xA)=MS_EM^{-1}}$ dove, se α è un autovalore di $\boldsymbol{A}$, allora il corrispondente autovalore di $\boldsymbol{S_E}$ è $\boldsymbol{Exp(x\alpha)}$. Viceversa, data una matrice quadrata $\boldsymbol{F(x)}$ funzione dello scalare x e diagonalizzabile in $\boldsymbol{MS_FM^{-1}}$, essa è del tipo $\boldsymbol{Exp(xA)}$ solo se i suoi autovalori sono del tipo $e^{\alpha_j x}$. In tal caso gli autovalori di $\boldsymbol{A}$ sono α_j: donde la matrice diagonale $\boldsymbol{S_A}$ ed infine $\boldsymbol{A=MS_AM^{-1}}$. Ma c'è un modo ben meno scomodo di stabilire se $\boldsymbol{F(x)}$ è o non è del tipo di $\boldsymbol{Exp(xA)}$ e, se lo è, di calcolare $\boldsymbol{A}$: ed è valido anche se $F(x)$ non è diagonalizzabile!

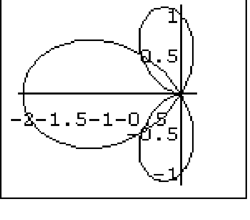
Che ne dite di verificare se:

$$\boldsymbol{F}(x) = \begin{bmatrix} 1 & -x & x \\ x & 1 - x^2/2 & x^2/2 \\ x & -x^2/2 & 1 + x^2/2 \end{bmatrix}$$

è del tipo di $\boldsymbol{Exp(xA)}$ e di calcolare $\boldsymbol{A}$?

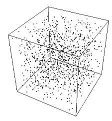
Lo scarabeo di E. C. Catalan
(1814-1894)

L'equazione $r = a \cdot \cos 2 \cdot t - c \cdot \cos t$ in coordinate polari, con t da 0 a $2 \cdot \pi$, genera la bella figura a fianco. Lo spunto è tratto da: Luciano Cresci, "Le curve celebri", edito da F. Muzzio, Padova, 1998; è un simpatico e piacevole libretto, ricco di notizie.



Termodinamica e formalismo matematico

di Innocenzo Bronzino



Affermando che la Scienza deve alla macchina a vapore più di quanto questa non debba alla Scienza, L. J. Henderson fotografava suggestivamente la nascita e lo sviluppo della Termodinamica, una mirabile creazione dell'ingegno umano rigogliosamente sviluppatasi pur se i suoi primi cultori, per molto tempo, ebbero dell'oggetto dei loro studi – il calore – concezioni fastidiose e stravaganti. In termini generali si può formulare il primo principio della Termodinamica affermando che la variazione dell'energia interna di un sistema è pari alla differenza fra calore assorbito e lavoro prodotto dal sistema stesso: l'espressione matematica di questo enunciato, però, ha creato qualche problema. Infatti nell'ipotesi di reversibilità del processo e per trasformazioni infinitesime, si ha: $dU=dQ-dW$ mentre la grandezza U, energia interna, è una funzione delle coordinate del sistema, le variazioni delle grandezze Q, calore, e W, lavoro esterno, non dipendono solo dalle posizioni iniziali e finali, ma anche dal cammino percorso per compiere la trasformazione che permette al sistema di scambiare calore e lavoro (chi va in montagna sa benissimo che si può arrivare in cima per diverse vie, ma lo sforzo fisico compiuto per l'ascensione dipende – eccome! – dal sentiero percorso).

Ora, poiché il valore dell'integrale curvilineo

$$\oint F dx + G dy$$

risulta essere indipendente dal percorso che congiunge due punti della regione in cui è definito l'integrale se e solo se

$$\partial F / \partial y = \partial G / \partial x$$

e questa condizione coincide con la definizione del differenziale esatto, si usa perciò anche dire, in Termodinamica, che calore e lavoro non sono differenziali esatti.

Quindi, mentre dU è un differenziale esatto, dQ e dW non lo sono. Però sappiamo che l'equazione $dU=dQ-dW$ è integrabile, dovremmo forse concludere che la realtà fisica è in contraddizione con le leggi della matematica? Non è così, perché la somma algebrica dei due differenziali non esatti, dQ e dW dà invece un differenziale esatto. Più in generale però un differenziale non esatto si trasforma in un differenziale esatto se può essere moltiplicato per un opportuno fattore integrante: si consideri per esempio $ydx-xdy$ se fosse un differenziale esatto dovremmo avere

$$\{\partial Y / \partial x\}_y = \{\partial X / \partial y\}_x$$

il che, nel nostro caso, non è vero perché risulterebbe $-1=1$. Se però si divide per il fattore integrante x^2, vedremmo rispettata la condizione di cui sopra e quindi la forma differenziale $(y/x^2) \cdot dx-(1/x) \cdot dy$ è proprio il differenziale esatto $d\phi$ il cui integrale ci dà $\phi=-(y/x)$. In altri termini determinando le grandezze Q e W in funzione di alcune coordinate fisiche di sistema (es.: pressione, volume, temperatura, ecc.) ed individuato il fattore integrante con gli strumenti dell'analisi matematica, la risoluzione dell'equazione permette di conoscere la nostra grandezza in funzione delle suddette variabili di sistema ed è assai significativo in fatto che il fattore integrante che si riesce a determinare per i sistemi termodinamici caratterizzati da un qualsivoglia numero di variabili indipendenti, sia poi una funzione della sola temperatura empirica che è la stessa per tutti i sistemi termodinamici.

Questo non è un artificio per rattoppare in modo logico una situazione apparentemente paradossale, è invece la testimonianza dell'intima coerenza dei fenomeni della natura con le leggi matematiche che ne permettono la comprensione.