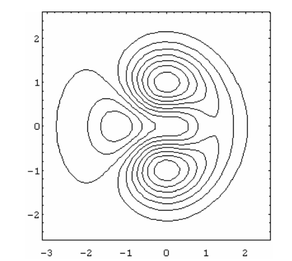
MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore: Luciano Corso - Redazione: Luciano Corso, Elisabetta Capotosto, Arnaldo Vicentini - Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – 338 6416432
e-mail: lcorso@iol.it – Stampa in proprio - Numero 100 – febbraio 2006



DISCRETO E CONTINUO

di Ruggero Ferro

[*Segue dal numero 99*]

Incommensurabilità

Già la scuola pitagorica aveva notato che ci sono lunghezze non commensurabili con una fissata unità di misura per le lunghezze, cioè non uguali a un multiplo razionale di tale unità di misura. Essendo un risultato che afferma che non ogni elemento ha una certa proprietà, sarà sufficiente esibire un caso in cui quella proprietà non vale. Un caso relativamente facile prevede di cercare di misurare la diagonale di un quadrato rispetto ad un suo lato preso come unità di misura. Si vuole mostrare che non c'è alcun numero razionale (che in questo caso dovrà essere positivo) che indichi la lunghezza della diagonale di un quadrato di lato uguale all'unità di misura delle lunghezze. Per assurdo si supponga l'esistenza di un tale numero razionale positivo, cioè di una coppia di numeri naturali, m ed n, che rappresentano il numero razionale. Si mostrerà che questa ipotesi non può essere accettata dal momento che porta ad una contraddizione. Il numero razionale che rappresenta la lunghezza del lato del quadrato è 1 dal momento che si è preso il lato uguale all'unità di misura, mentre quello che rappresenta la lunghezza della diagonale sarà m/n per l'ipotesi fatta, cioè dividendo in n parti uguali il lato e prendendo m di queste parti si ottiene la lunghezza della diagonale. Dalla geometria conosciamo il teorema di Pitagora (in un triangolo rettangolo il quadrato di lato l'ipotenusa è uguale alla somma dei quadrati che hanno per lato i cateti), e anche come collegare le misure lineari con quelle di superficie quando si tratta di rettangoli ed in particolare di quadrati. Così si può affermare che $(m/n)^2 = 2$, cioè che $m^2 = 2n^2$. Sfruttando il teorema di fattorizzazione unica, si può affermare che il numero primo 2 compare esattamente un certo numero r di volte come fattore del numero m, ed esattamente un certo numero s di volte come fattore del numero n. Ne segue che il numero 2 compare $2r$ volte come fattore in m^2 e $2{\cdot}s+1$ volte come fattore nel numero $2n^2$. Sempre per il teorema di fattorizzazione unica, essendo $m^2 = 2n^2$, dovrà essere $2{\cdot}r = 2{\cdot}s+1$, ma ciò è impossibile perché $2{\cdot}r$ è un numero pari e $2{\cdot}s+1$ un numero dispari. In tal modo si è raggiunto un assurdo e l'ipotesi che il numero razionale m/n misuri la diagonale rispetto al lato preso come unità di misura non può essere accettata. D'altra parte il numero razionale m/n era uno qualsiasi sicché non può esserci alcun numero razionale che sia la misura della diagonale del quadrato rispetto al suo lato preso come unità di misura.

Anche se quanto dimostrato è sufficiente per concludere con l'esistenza di grandezze non commensurabili (certo non si vuole negare che un qualsiasi quadrato abbia una diagonale), si può notare che l'essere una grandezza non commensurabile non è un fatto così eccezionale e si possono esibire molte altre grandezze non commensurabili. Ad esempio il lato di un quadrato di area p volte l'area di un quadrato di lato unitario, con p numero naturale che non sia il quadrato di un naturale, è non commensurabile. Infatti, se p è un numero primo, la conclusione si ottiene modificando la dimostrazione precedente facendo giocare al numero p il ruolo che era giocato dal numero 2 nell'espressione $(m/n)^2 = 2$. Se invece p non è un numero primo, sicuramente esiste un fattore primo che non occorre nella fattorizzazione di p un numero pari di volte (dal momento che si è supposto che p non sia il quadrato di un numero naturale), e la dimostrazione si svolge ancora in modo analogo sostituendo tale fattore primo nel ruolo di 2 nella dimostrazione presentata. Anche lo spigolo di un cubo di volume q volte il volume di cubo di lato unitario, con q numero naturale che non sia il cubo di un naturale, è una lunghezza incommensurabile con l'unità di misura delle lunghezze. La dimostrazione di questa affermazione è del tutto analoga a quella precedente con i suoi due casi, differisce solo per il dover tener conto delle caratteristiche della divisibilità per tre nel confrontare esponenti, invece della distinzione tra pari e dispari.

L'indicazione di infinite altre grandezze non commensurabili non è certo esaustiva, ma qui è sufficiente per sostenere che non sono un'eccezione.

Si era anticipato che la infinita divisibilità è una situazione che è implicata dalla continuità, ma non la implica. Infatti la presenza delle grandezze commensurabili con un qualsiasi rapporto razionale assoluto con l'unità di misura (in particolare con il rapporto $1/n$ per ogni numero naturale n) indicano un ambito in cui si realizza la infinita divisibilità, ma non continuo come testimonia la presenza di grandezze non commensurabili, che ci sono proprio grazie all'ipotesi di continuità utilizzata nella costruzione di certe lunghezze.

Dunque ci sono delle grandezze, chiamate incommensurabili, per misurare le quali non ci si può ridurre al contare quante sottoparti tra loro uguali dell'unità di misura servono per ottenere esattamente quella grandezza, e rimane il problema di come misurare tali grandezze incommensurabili con una certa unità di misura. [*Segue al n. 101*]

Quattro colori non bastano

a risolvere il problema originale di Francis Guthrie

di Vincenzo Zamboni

Nel 1852 uno studente di legge, Francio Guthrie, chiese al fratello, un matematico del University College di Londra, se 4 colori fossero sufficienti a colorare una qualsiasi carta geografica, suddivisa in stati nazionali, o altro genere di regioni amministrative, intendendosi che ad ogni stato si dovesse attribuire un colore diverso da quelli degli stati confinanti. Il problema resistette a tutti i tentativi di dimostrazione, compreso quello di Herman Minkowskj, per ben 124 anni.

Nel 1976, Kenneth Appel e Wolfang Hackel dichiararono di averlo risolto. Ogni mappa possibile risulterebbe riconducibile a 1500 mappe fondamentali - questo risultato è dovuto a matematici precedenti - e il problema può essere analizzato con la teoria dei grafi. L'analisi delle mappe base è stata affidata a calcolatori che hanno sentenziato, con grande soddisfazione dei matematici di tutto il mondo, «quattro colori bastano». Tuttavia c'è un problema fondamentale di credibilità del teorema: il teorema è vero se e solo se il programma che ne ha decretato la verità è corretto, ma manca la dimostrazione di correttezza di questo programma.

Ora, qui non verrà messa in dubbio la bontà del lavoro di Appel e Hackel, bensì un inconveniente nelle premesse originali, che rende il loro teorema un po' diverso dal problema di F. Guthrie.

Riferendoci alle carte geografiche, è possibile immaginare teoricamente, e constatarne l'esistenza nella pratica, di stati (o altri tipi di regioni) formati da regioni piane non connesse:

vale a dire, delimitati da due (o più) linee di contorno chiuso non intersecatesi. Un esempio evidente è costituito dagli USA, giacché l'Alaska è separata dal resto degli stati. Un altro esempio, è stato, per mezzo secolo, la Germania Federale: benché piccola (fatto che topologicamente non ha alcuna importanza), la zona di Berlino Ovest ha costituito una fetta di Germania Ovest, separata dal resto della nazione. Non decade, con ciò, il requisito originale che si individui con un identico colore tutto il territorio di un medesimo stato. Prendiamo in esame, allora, la zona di confine tra Francia e Lussemburgo, schematizzabile, topologicamente, come in fig. 1:

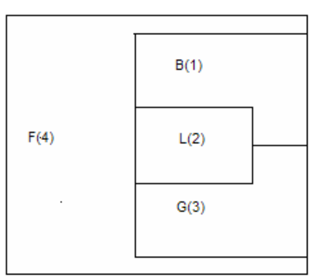


Fig. 1

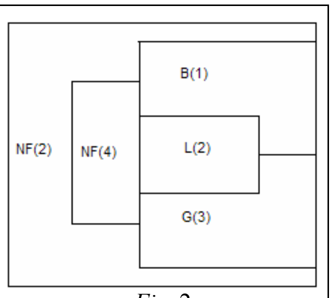


Fig. 2

Nell'immagine B, L, G, F indicano i quattro stati, mentre i numeri tra parentesi indicano i rispettivi colori. Supponiamo che la popolazione francese al confine con B, L e G si proclami indipendente, dando origine al nuovo stato NS di figura 2:
Come si vede è possibile attribuire a NS il colore della vecchia Francia e alla nuova Francia quello del Lussemburgo, essendo scomparso il vecchio confine F-L. D'altro canto, (4) è l'unico colore attribuibile a NF, che confina con B, L e G.

Tuttavia la nuova Francia protesta per essere stata privati di ogni possibilità di comunicazione con il Lussemburgo e ottiene un corridoio di passggio , come il figura 3.

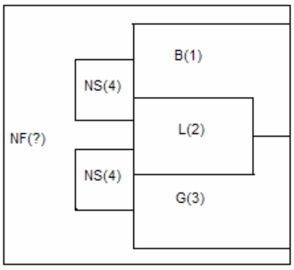


Fig. 3

In simili circostanze, (4) rimane ancora l'unico colore possibile da attribuire a NS, rimanendo 1, 2, 3 i colori di B, L e G. Invece, non è più possibile assegnare il colore (2) a NF, essendo stata ripristinata una zona di confine tra Francia e Lussemburgo. In simili circostanze, (4) rimane ancora l'unico colore possibile da attribuire a NS, rimanendo 1, 2, 3 i colori di B, L e G. Invece, non è più possibile assegnare il colore (2) a NF, essendo stata ripristinata una zona di confine tra Francia e Lussemburgo. NS ha la stessa struttura degli USA e della vecchia Germania Federale (composte da due regioni separate), il che mette la nuova Francia nella condizione di aver bisogno di un nuovo colore. Siccome gli stati formati da regioni non connesse esistono (e, a differenza della Germania Federale, gli USA esistevano anche ai tempi di Guthrie) quattro colori bastano per qualsiasi mappa di Appel e Hacken, ma non bastano per qualunque mappa geografica, come richiesto da Guthrie. In sostanza, i due matematici dell'Università dell'Illinois hanno dimostrato un teorema molto simile, ma non del tutto, a quello richiesto da quello originale. Si evidenzia, qui, il fatto che ogni teorema, oltre a godere di una coerenza interna,deve risultare coerente con i problemi cui lo si voglia applicare. La risposta al problema delle mappe di Appel e Hacken è sì. La risposta al problema delle carte geografiche di Francio Guthrie è no. Accade talvolta che qualche filantropo istituisca premi in denaro per chi risolve qualche problema matematico. Se Guthrie, o altri per lui, avesse istituito uno di quei premi per il problema delle carte geografiche, esso non potrebbe essere assegnato ai, pure eccellenti Appel e Hacken. A proposito, se vi risulta che qualcuno abbia istituito un premio per la questione delle carte geografiche, per favore, contattate l'autore.

In sostanza, l'ipotesi di connessione delle singole zone perché funzioni il teorema dei 4 colori risulta determinante.

Bibliografia: [B.1] Marcus Du Sautoy, *L'enigma dei numeri primi*, egizioni Rizzoli, Milano, 2004; [B.2] Abert Beutelspacher, *Matematica da tasca*, Ponte alle Grazie, 2002.

Mercoledì 19 aprile 2006 ore 20.45 – Teatro Camploy di Verona –Titolo: *Non solo numeri* – Spettacolo teatrale di matematica e varia umanità – Regia di Mario Peretti – Contatti: breonigiuli@libero.it

Il tempo, l'uomo, Dio: riflessioni

di Paolo Di Sia

[*Segue dal n. 99*] **Tempo, scienza e universo**

Le capacità umane sembrano finora in grado di comprendere il *codice cosmico*, di cercare di decodificare la natura. Lo sviluppo della scienza in relazione all'esistenza delle persone che ad essa si dedicano, si caratterizza per progresso intellettuale crescente (la conoscenza seria e approfondita richiede infatti molti anni di studio). Circa le capacità creative spesso la proporzionalità risulta inversa; si pensi infatti alle grandi scoperte di personaggi come **Newton**, **Einstein** e **Dirac**, i cui importanti contributi sono avvenuti in giovane età. Tale fatto risulta spesso addirittura amplificato per ciò che concerne la "genialità matematica". Risulta assai arduo fornire spiegazioni circa l'ispirazione matematica ed artistica; anche l'eleganza matematica (pura, cioè vista in sé, o in relazione al suo utilizzo applicativo) risulta sorprendente.

L'uomo ha sviluppato le funzioni mentali superiori della matematica; tale sistema risulta il più complesso in natura e paradossalmente è l'unico in grado di comprendere il mondo subatomico, i cui processi risultano invece i più primitivi in natura. Da sempre uomini di scienza si sono interessati ai legami esistenti tra la scienza stessa, la filosofia, la religione, il senso della vita. Il fisico **Paul Davies**, descritto dal Washington Times come "il miglior scrittore di cose scientifiche su entrambi i lati dell'Atlantico", si è sempre impegnato nei suoi libri a spiegare concetti scientifici avanzati in modo semplice, cercando di indagare le conseguenze filosofiche delle idee più recenti sul fronte della ricerca. Da persona interessata alle questioni fondamentali dell'esistenza, alla natura della coscienza umana e ai rapporti tra scienza e religione, considera quattro schemi teologici:

1) ***Deismo***: dottrina che rifiuta la rivelazione e i dogmi e concepisce un Dio come principio razionale ordinatore della natura.
2) ***Teismo***: dottrina che ammette l'esistenza di una divinità personale e unica).
3) ***Panteismo***: dottrina che identifica Dio con tutta la realtà e la natura del mondo.
4) ***Panenteismo***: punto di vista filosofico mediatore delle diverse istanze di panteismo e teismo, secondo cui Dio rimane un essere autonomo e personale, ma la sua azione si estrinseca nel mondo, conferendo a quest'ultimo forma e realtà.

La natura ha per lui un carattere aperto, indeterministico, e il futuro "non è implicito nel presente"; il mondo è insieme scelta e caso, e ciò sembra risultare incompatibile con l'idea di un Dio immutabile, atemporale. Una spiegazione razionale del mondo è forse impossibile; la scienza può comunque comprendere una parte dei segreti della natura poiché, per Davies, "l'universo ha generato, attraverso degli esseri coscienti, la consapevolezza di sé".

Bibliografia: [B.1] K. Barth: *Dogmatica in sintesi,* Città Nuova, 1969; [B.2] P. Davies: *Dio e la nuova fisica,* Arnoldo Mondadori Editore, 1984; [B.3] P. Davies: *La mente di Dio,* Mondadori, 1996; [B.4] L. Lombardo Radice: *L'infinito,* Editori Riuniti (Libri di base 26), 1981; [B.4] J. Moltmann: *Teologia della Speranza*, Queriniana, 1970; [B.5] *Opere di Teilhard De Chardin, Il Saggiatore, 1974*

(*) disia@profs.sci.univr.it