MatematicaMente

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} = \frac{1}{e}$$

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore: Luciano Corso - Redazione: Luciano Corso, Elisabetta Capotosto, Arnaldo Vicentini - Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – 338 6416432
e-mail: lcorso@iol.it – Stampa in proprio - Numero 101 – marzo 2006

DISCRETO E CONTINUO

di Ruggero Ferro

[*Segue dal numero* 100]

Misurazione pratica di una grandezza incommensurabile

Una soluzione potrebbe essere quella di tornare al vecchio metodo geometrico delle proporzioni ed utilizzare il rapporto tra due grandezze per confrontarlo con i rapporti tra altre grandezze, senza che i rapporti tra grandezze siano un qualche tipo di numeri, tanto meno numeri costruiti a partire da coppie (n-uple) ordinate di naturali.

Oppure ci si può rifare a quello che si fa in pratica quando si vuole misurare una grandezza, quando, per apprezzare una grandezza confrontandola con una unità di misura familiare, ci si vuole ridurre ad un misurare contando. Si consideri, ad esempio, la misurazione pratica della lunghezza di un segmento orientato mediante un metro. In questo caso si cerca il numero massimo di metri che forniscono una lunghezza minore od uguale di quella da misurare (se non ci fosse questo numero massimo dovremmo concludere che la grandezza da misurare è maggiore di qualsiasi multiplo intero, e quindi anche di ogni multiplo razionale, dell'unità di misura, sicché questa grandezza non può essere neppure avvicinata da grandezze multiple razionali dell'unità di misura, e dunque rimarrebbe fuori del nostro interesse), e, se avanza ancora qualcosa, si suddivide il metro in parti, ad esempio decimetri, e si cerca il numero massimo di queste parti che sono contenute nel tratto che era avanzato, se rimane ancora qualcosa si suddividono ancora le parti che si erano ottenute, ad esempio in dieci parti uguali ottenendo una suddivisione in centimetri, e si controlla qual è il numero massimo di queste parti che sono contenute nel tratto ancora non ricoperto, e così via. Può succedere che dopo un certo numero di stadi di questo processo si arrivi ad una grandezza uguale a quella che si voleva misurare: se ciò succede, quella grandezza era commensurabile con l'unità di misura e attraverso il processo si è ottenuto il numero razionale che indica il suo rapporto con l'unità di misura. Generalmente si arriva ad un certo punto del processo in cui pur non avendo raggiunto esattamente la grandezza da misurare, quanto avanza è così piccolo che non è apprezzabile con gli strumenti a disposizione. In questa situazione ci si arresta avendo costruito una grandezza commensurabile con l'unità di misura che differisce dalla grandezza che si vuole misurare per meno di quanto gli strumenti disponibili possano rilevare.

Da un punto di vista pratico si accetta di conoscere approssimativamente il rapporto di una certa grandezza A con l'unità di misura mediante una grandezza B la cui differenza dalla grandezza A non sia rilevabile dagli strumenti di misura, e tale che B sia commensurabile con l'unità di misura, e quindi avente un rapporto razionale con l'unità di misura, rapporto che potrà essere considerato approssimativamente la misura della grandezza data. Di fatto per ogni strumento di misura c'è un numero naturale n_s tale che lo strumento non riesce a rilevare le n_s-esime parti dell'unità di misura. Pertanto il massimo che si potrà affermare utilizzando uno strumento è che una data grandezza A ha una misura compresa tra un certo numero m di parti n_s-esime dell'unità di misura U e $m + 1$ di tali parti, $(m/n_s)U \leq A \leq ((m+1)/n_s)U$. Questo sapere precisare solo che una grandezza si trova all'interno di un intervallo non è molto soddisfacente né da un punto di vista tecnologico (anche se in questo caso l'ottimo è nemico del meglio) né da un punto di vista scientifico, né concettualmente, tanto è vero che sul versante più applicativo si sviluppa tutta la teoria degli errori (che vuole cogliere come una imprecisione della misurazione di una grandezza si rifletta sulle misure di altre grandezze ad essa collegate), che qui tralasceremo, mentre sul versante più speculativo si cerca di vedere cosa si può dedurre supponendo di poter considerare sia l'intero insieme delle approssimazioni razionali per difetto che quello delle approssimazioni razionali per eccesso.

Detto altrimenti, almeno da un punto di vista teorico, si suppone di poter costruire strumenti sempre più sensibili che possano apprezzare le differenze che siano maggiori di quelle del tipo $1/n$ volte l'unità di misura, qualunque sia il numero naturale n, sicché, se la grandezza che si vuole misurare è incommensurabile con l'unità di misura, il processo prima descritto non terminerà mai, e si otterranno grandezze commensurabili con l'unità di misura sempre più vicine alla grandezza da misurare, ma mai uguali a questa. Chiameremo le grandezze così costruite <u>approssimazioni razionali per difetto</u> della grandezza da misurare. In questa denominazione l'aggettivo razionali vuole sottolineare sia che le grandezze che approssimano una grandezza data sono tutte ottenibili dall'unità di misura dividendola in un numero naturale di parti e prendendo un numero intero di tali parti (e che quindi le approssimazioni sono commensurabili con l'unità di misura e che il rapporto con questa si esprime con un numero razionale), sia che sono grandezze ben valutabili e conoscibili (in relazione alla conoscenza dell'unità di misura, che deve essere familiare) dal momento che si ottengono dall'unità di misura con operazioni ripetute un numero finito di volte, come indicano e richiedono le coppie ordinate di due numeri interi, il secondo maggiore di 0, che rappresentano i numeri razionali ciascuno dei quali è la misura di una delle grandezze approssimanti.

Come si sono costruite le approssimazioni razionali per difetto si possono costruire anche le <u>approssimazioni razionali per eccesso</u>. Così si cerca il numero minimo di giustapposizioni di copie dell'unità di misura per ottenere una grandezza maggiore o uguale di quella da misurare e, se è maggiore, all'ultima copia giustapposta si sostituisce il numero minimo di sue parti n-esime in modo che la grandezza ottenuta sia ancora maggiore od uguale di quella da misurare, e si prosegue in tal modo dividendo l'unità in parti secondo le successive potenze di n. Anche in questo caso il processo ha termine con la misurazione esatta della grandezza da misurare solo se questa è commensurabile con l'unità di misura, altrimenti si potrà proseguire indefinitamente nel migliorare l'approssimazione (cioè nel rendere sempre più piccola la differenza, apprezzabile da strumenti ideali di misura, tra quanto costruito e la grandezza da misurare). [*Segue al numero 104*]

Che sono le stringhe ?

di Carlo Marchiori [1]

Ho letto l'articolo pubblicato sul numero 92 – giugno 2005 – di Matematicamente sulla teoria delle stringhe. In senso lato, e forse un po' impropriamente, se la meccanica classica descrive la dinamica di punti materiali, la teoria delle stringhe nella formulazione più recente descrive la dinamica di superfici di dimensione 0 (punti), 1 (stringhe), 2 (superfici), etc... dove ogni superficie può 'vivere' all'interno di superfici di dimensione maggiore. Le superfici possono essere catalogate in base alle loro caratteristiche topologiche, per esempio in base al numero di 'buchi'. Per passare da una topologia ad un'altra, per esempio dalla sfera bidimensionale al toro, occorre creare un 'buco' nella sfera, e, nel momento di transizione tra una topologia e l'altra si ha una 'strozzatura', una singolarità. Queste singolarità normalmente in fisica vengono considerate dei casi limite patologici che rimangono al di fuori del dominio della teoria fisica. In altre parole, tradizionalmente in fisica si adottano superfici lisce, infinitamente differenziabili. Quando si hanno singolarità, tipicamente le grandezze fisiche divergono verso infinito e la teoria perde di significato fisico. L'articolo parla di un meccanismo matematico che descrive la transizione da una topologia ad un'altra. La teoria mostra come la singolarità che si crea venga in qualche modo coperta e compensata dalla presenza di stringhe nei dintorni della singolarità, in modo tale che le grandezze fisiche rimangono finite. In questo modo questa transizione topologica rimane entro il dominio della teoria e fa parte integrante della dinamica delle superfici descritte dalla teoria delle stringhe. Un analogo nella dinamica classica sarebbe se fosse possibile per un punto materiale descrivere un angolo nella sua traiettoria. L'angolo è una singolarità (la traiettoria diventa non differenziabile), ma viene escluso dalla teoria classica perché richiederebbe una forza infinita (appunto: si ha una singolarità e le grandezze fisiche divergono). Se l'universo fosse quello descritto dalla teoria delle stringhe, allora la sua topologia potrebbe cambiare anche radicalmente nel tempo. Ovviamente questa è una descrizione 'intuitiva'. Una comprensione completa in termini matematici è riservata ai professionisti del ramo.

[1] Fisico in quel di Verona

«Ho sempre cercato nella matematica storie segrete e belle lettere. Divagavo e continuo a divagare, incapace di fermarmi in un unico conoscere. Mi sono scientemente condannato a essere un dilettante specialista: e questo dilettante ha oggi l'ardire di offrirvi parole d'amore matematico, sperando che possano sembrarvi, almeno un poco dilettevoli» (I. Arcangeloni)

«… è una semplice storia narrata con un linguaggio universale, quello matematico. Lasciatevi portare oltre la linea del vostro orizzonte». (M. Peretti)

Sulla conoscenza

di Luciano Corso

[*Segue dal n. 95*]

Il secolo che va dal 1750 al 1850 rappresenta un periodo straordinario per la libertà del pensiero. Siamo nell'Illuminismo e la convinzione comune degli uomini colti era che tutto dovesse essere regolato da due principi: *Natura e Ragione*. La Natura era il campo d'indagine per l'uomo e la Ragione era l'unico punto certo di riferimento per ogni speculazione sull'Universo, sulla vita. Con questi presupposti si può ben pensare che qualche errore di valutazione lo potessero fare anche eminenti scienziati del tempo. La fiducia cieca nella ragione conduce eminenti studiosi a fare affermazioni ottimistiche sulla possibilità dell'uomo di risolvere problemi. Con Pierre Simon Marchese De Laplace (nato a Beaumont-en-Auge, Normandia nel 1749, morto a Parigi nel 1827) l'idea che il mondo sia governato da regole ferree e che solo l'imperfetta conoscenza di queste regole fosse la causa di errori e indeterminazioni da parte dell'uomo venne portata fino alle estreme conseguenze. Laplace viene considerato anche oggi il prototipo dello scienziato determinista. Secondo il suo pensiero tutto ciò che si manifesta nell'Universo è frutto di una stretta relazione di causa-effetto. Spesso, però, lo stato di carenza d'informazione rispetto a ciò che appare, induce nell'uomo incapacità di comprendere queste relazioni. Una variante interessante per gli sviluppi che ebbe successivamente è la tesi sostenuta da molti scienziati del tempo (anche da molti matematici famosi) riassunta da ciò che ebbe a scrivere Niels Henrik Abel «*Bisogna dare a un problema una forma tale che sia sempre possibile risolverlo, la qual cosa si può fare sempre, con qualsiasi problema*» [B.17]. La tesi porta l'idea che ogni problema sia risolvibile, basta porlo in un sistema concettuale giusto e proprio. Da queste idee inutile dire l'effetto che ebbe la pubblicazione del libro sull'Origine delle specie di Darwin.

Charles Darwin (nato a Shrewsbury nel 1809, morto nel 1882), rappresenta senza dubbio uno scienziato sistematico che ebbe un forte impatto sul pensiero scientifico .Come già scritto in [B.16], Darwin ebbe il merito di cogliere un aspetto trascurato dalla scienza del tempo – essenzialmente deterministica. Investigò i processi evolutivi e le ragioni per le quali sulla Terra si sono differenziate le diverse specie biologiche. Concluse che la vita, così come si conosceva allora era il prodotto di una evoluzione da organismi semplici a organismi più complessi e sempre meglio adattati a vivere negli ambienti naturali da loro occupati. Questo processo evolutivo dipende, secondo Darwin, da processi selettivi dovuti a mutamenti delle condizioni ambientali in cui le diverse specie vivono e tali mutamenti sarebbero dovuti al caso. Il caso quindi diventa per la teoria darwiniana della selezione naturale il fattore determinante che ha originato la vita come noi la conosciamo sulla Terra. Sul piano filosofico ciò costituisce una autentica rivoluzione, in quanto, contro le teorie Laplaciane del determinismo assoluto sulla stato del mondo, appare una interpretazione della conoscenza e della vita che ripropone l'idea di Democrito sul *caso e la necessità* come costruttori dell'essere, con però una conferma storico-sperimentale che diede all'intuizione di Democrito una forte scientificità. Sul piano scientifico il metodo di Darwin, pur salvando quello galileiano, va oltre considerando scientifico anche quanto proviene da una sperimentazione non riproducibile n volte in laboratorio, ma oggettiva comunque rispetto ai dati storico-sperimentali in quanto controllabile e interpretabile coerentemente. Inutile sottolineare la importanza di tale idea per la scienza moderna [B.16].

Georg Cantor (nato a Pietroburgo nel 1845, morto nel 1918) è l'emblema dell'analista puro. Tutta la sua vita venne dedicata a studi altamente speculativi che sono sfociati in una visione critica e assai innovativa dei fondamenti del pensiero matematico. Sotto l'aspetto della conoscenza, i meriti di Cantor sono molteplici, ma due possono essere considerati essenziali: 1) l'aver sistemato e promosso la teoria degli insiemi come ambiente in cui sviluppare sia l'analisi matematica che l'aritmetica e, sostanzialmente, ogni teoria matematica; 2) l'aver introdotto in modo esplicito la nozione insiemistica di infinito attuale, accettando anche le sue conseguenze apparentemente paradossali. Questi due risultati della sua ricerca rappresentano un importante contributo alla comprensione di concetti che fino ad allora erano rimasti vaghi e problematici (ad esempio il confronto di numerosità tra insiemi infiniti). Sono dovute a Cantor le dimostrazioni, con il geniale metodo della triangolazione, sia della numerabilità dei numeri razionali, sia della non numerabilità dei numeri reali [B.5]. La teoria degli insiemi diventa una teoria essenziale per evidenziare importanti aspetti di concetti matematici e scientifici.

Bibliografia: [B.16] L. Corso, *Sul metodo scientifico,* MatematicaMente n. 33, Settembre 2000, Mathesis VR; [B.17] Peter Pesic, *La prova di Abel*, Bollati Boringhieri, 2005, Torino; [B.5] Vedi Mat…mente n. 81