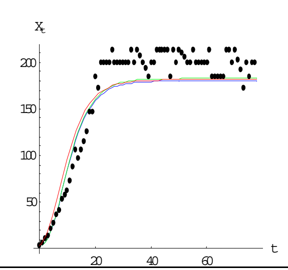
# MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore: Luciano Corso - Redazione: Luciano Corso, Elisabetta Capotosto - Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – 338 6416432
e-mail: lcorso@iol.it – Stampa in proprio - Numero 104 – giugno 2006


## DISCRETO E CONTINUO


di Ruggero Ferro [1]



[*Segue dal numero* 101]


**Proprietà degli insiemi di approssimazioni razionali**

Si noti come, nel caso di grandezze commensurabili con l'unità di misura, si sia riusciti a misurare contando, nel senso che si è riusciti a misurare una certa grandezza dividendo l'unità di misura in un certo numero finito di parti tra loro uguali (contando in quante parti si deve dividere l'unità di misura) e poi contando quante di queste parti devono essere considerate per completare la misurazione. Sarebbe bello poter riuscire a trovare un analogo modo di contare che permetta di misurare ancora in qualche modo contando anche le grandezze incommensurabili con l'unità di misura.

Un'idea potrebbe essere quella di determinare una grandezza incommensurabile con l'unità di misura mediante i due insiemi delle grandezze che la approssimano razionalmente per difetto e per eccesso, grandezze che, come si è visto, si misurano contando. Così ci interessa capire se e come i due insiemi delle approssimazioni razionali per difetto e per eccesso di una grandezza possano determinare la grandezza stessa e la sua misura. Per affrontare con maggiori conoscenze questo problema iniziamo con l'analisi dei due insiemi di approssimazioni. Può darsi che la grandezza che si vuole misurare sia commensurabile con l'unità di misura, e in tal caso esisterà un numero razionale $m/n$ tale che dividendo l'unità di misura in $n$ parti uguali e prendendo $m$ di queste parti si ottiene esattamente la grandezza da misurare, sicché si può dire che il numero razionale $m/n$ è la misura di quella grandezza e non ha molto interesse approssimarla, visto che già se ne conosce una misura esatta. Tuttavia, al fine di uniformare la trattazione e non dividerla in vari casi possibili (di prima o di seconda specie), si accetti di considerare la stessa grandezza razionale che misura esattamente la grandezza data come un'approssimazione per difetto, e di considerare, anche in questo caso, la coppia degli insiemi delle approssimazioni razionali per difetto e per eccesso che saranno rispettivamente l'insieme delle grandezze determinate da un razionale minore od uguale a $m/n$ e l'insieme delle grandezze determinate da un razionale maggiore di $m/n$. Siano $D$ e $E$ gli insiemi dei numeri razionali che misurano contando le approssimazioni razionali per difetto e per eccesso rispettivamente.

*a*) Chiaramente ciascun numero dell'insieme $D$ è minore di ciascun numero dell'insieme $E$.

*b*) Ancora: l'unione di questi due insiemi o è costituita dalla totalità dei numeri razionali, o dalla totalità dei numeri razionali meno quello che è stato escluso nel caso che la grandezza da misurare sia commensurabile, nel qual caso ogni elemento di $D$ è minore del numero escluso e ogni elemento di $E$ è maggiore di lui. Questa proprietà dipende dal fatto che ogni multiplo razionale dell'unità di misura o è minore o uguale della grandezza da misurare o è maggiore di essa, (si noti che si stanno considerando come approssimazioni per difetto anche grandezze molto lontane da quella che si vuole misurare, ma comunque più piccole; analogamente per le approssimazioni per eccesso).

*c*) Entrambi gli insiemi $D$ e $E$ sono non vuoti, altrimenti tutti i razionali sarebbero in uno solo dei due e tutte le possibili grandezze commensurabili con l'unità di misura sarebbero o tutte minori ($E$ vuoto) o tutte maggiori ($D$ vuoto) della grandezza da misurare: questa potrebbe convenientemente essere chiamata infinita (pur senza precisare di quale nozione di infinità si sta parlando), ma si è già detto che si vuole che la misurazione termini, e dunque si vuole escludere questa situazione che farebbe considerare una grandezza sicuramente non misurabile.

Una coppia ordinata di insiemi non vuoti di numeri razionali $X$ e $Y$ tali che
i) ciascun elemento di $X$ è minore di ciascun elemento di $Y$,
ii) l'unione di $X$ e $Y$ è uguale all'insieme dei razionali,
iii) entrambi gli insiemi $X$ e $Y$ non sono vuoti,
è detta una sezione di Dedekind.

Le seguenti ulteriori proprietà della coppia ordinata di insiemi $X$ ed $Y$ che costituiscono una sezione di Dedekind seguono dalle altre proprietà che caratterizzano tale nozione:
iv) i numeri razionali minori di un numero appartenente a $X$ appartengono a $X$ e i numeri razionali maggiori di un numero appartenente a $Y$ appartengono a $Y$, altrimenti verrebbero violate o la proprietà i) o la ii);
v) non può succedere che $X$ abbia massimo ed $Y$ abbia minimo: infatti, se $x$ fosse il massimo di $X$ e $y$ il minimo di $Y$, questi sarebbero numeri razionali, come pure il numero $(x+y)/2$ che dunque dovrà appartenere o a $X$ o a $Y$; inoltre, per la i), $x < y$ e $x < (x+y)/2 < y$, contro le ipotesi fatte su $x$ e $y$;
vi) preso comunque un numero naturale $\underline{n}$ esistono due numeri razionali $r_1$ e $r_2$ tali che $r_1$ appartiene a $X$, $r_2$ appartiene a $Y$ e $r_2–r_1$ è minore di $1/\underline{n}$. Questa affermazione si può giustificare nel modo seguente. Si considerino due numeri razionali, $m_1/n_1$ e $m_2/n_2$ (con $n_1$ e $n_2$ maggiori di 0), appartenenti a $X$ e a $Y$ rispettivamente ($X$ ed $Y$ non sono vuoti), e i numeri razionali del tipo $(m_1/n_1) + k/(2\times\underline{n}\times n_1\times n_2)$, con $k$ numero naturale che va da 0 a $(m_2\times n_1\times 2\times\underline{n} - m_1\times n_2\times 2\times\underline{n})$. I numeri di questo tipo hanno le seguenti caratteristiche:
1) quando $k$ è 0 il numero razionale corrispondente del tipo indicato è $m_1/n_1$, che appartiene a $X$, mentre
2) per $k = (m_2\times n_1\times 2\times\underline{n} - m_1\times n_2\times 2\times\underline{n})$ il numero razionale corrispondente del tipo indicato è $m_2/n_2$, che appartiene a $Y$, e
3) al crescere di $k$ cresce il valore del numero razionale corrispondente del tipo indicato, e
4) la distanza tra due di questi numeri corrispondenti a valori di $k$ consecutivi è $1/(2\times\underline{n}\times n_1\times n_2)$ che è minore od uguale di $1/(2\times\underline{n})$, e
5) alcuni di essi apparterranno a $X$ (almeno $m_1/n_1$) mentre altri apparterranno a $Y$ (almeno $m_2/n_2$),
6) poiché i valori che $k$ può assumere sono in numero finito, per confronto delle varie possibilità si può trovare un valore massimo $k_M$ per $k$ tale che $(m_1/n_1) + k_M/(2\times\underline{n}\times n_1\times n_2)$ appartiene a $X$ ($k_M$ non può essere $m_2\times n_1\times 2\times\underline{n} - m_1\times n_2\times 2\times\underline{n}$ perché il corrispondente numero del tipo considerato appartiene a $Y$ e non a $X$) e, di conseguenza, $(m_1/n_1) + (k_M+1)/(2\times\underline{n}\times n_1\times n_2)$ appartiene a $Y$.

Si sono così trovati due razionali, $(m_1/n_1) + k_M/(2\times\underline{n}\times n_1\times n_2)$ e $(m_1/n_1) + (k_M+1)/(2\times\underline{n}\times n_1\times n_2)$ il primo appartenente a $X$ e il secondo a $Y$ tali che la differenza tra loro è $1/(2\times\underline{n})$ che è minore di $1/\underline{n}$. Si noti come le collezioni $X$ ed $Y$ siano collezioni infinite, sicché per poter parlare della loro coppia ordinata è indispensabile che siano insiemi infiniti, il che corrisponde ad accettare definitivamente, almeno per questi studi, la nozione di infinito attuale. [*Segue al numero* 108]

[1] Docente di Logica Matematica - Università degli Studi di Verona

# Il modello di B. Gompertz: l'applicazione

di Mattia Battiston e Marco Banterle [•]

[*Segue da MatematicaMente nn.* 102 e 103]

**L'elaborazione dei dati sperimentali con "Mathematica"**

La presente elaborazione è stata curata dagli alunni M. Banterle e M. Battiston con il contributo dei docenti L. Corso, F. Castelli, G. Pezzo l'ITIS G. Marconi di Verona, corso di Informatica. Esso è stato scelto tra tutti i lavori svolti dagli studenti che hanno partecipato al *progetto lauree scientifiche* del MIUR perché ritenuto il più significativo. Tuttavia va riconosciuto a tutti i partecipanti impegno e qualità del programma presentato. La commissione giudicatrice, costituita da Roberto Chignola, Simone Zuccher, Luciano Corso, Fabio Castelli e Gianfranco Pezzo, ha assegnato un buon giudizio a tutti gli studenti che hanno fatto parte del progetto e che qui di seguito elenchiamo in ordine alfabetico. Amorim Gabriela (5° D i), Banterle Marco (5° E i), Battiston Mattia (5° E i), Benasi Plinio (5° D i), Castellani Federico (5° F i), Fraccaroli France-sco (5* B i), Freddo Giorgia (5° A i), Furlani Dimitri (5° F i), Gaiga Michele (5° F i), Longo Marco (5° C i), Lorenzi Giovanni (5° D i), Marazzi Mattia (5° F i), Marchetto Giacomo (5° D i), Ruffo Massimiliano (5° D i), Segna Tommaso (5° C i), Scandola Luca (5° B i), Tenuti Mattia (5° C i), Tinazzi Mattia (5° F i).

Consegna:

1. -trovare i parametri del modello di Gompertz
   -importare i dati dai file
   -creare la lista dei punti di valore media tra i valori di tutti gli esperimenti
   -trovare la curva interpolante per ottenere i parametri A e B
   -trovare i parametri β,k,c
2. trovato il modello, creare la lista dei dati teorici (ovvero i dati ottenuti utilizzando il modello)
3. trovare i residui (la differenza) tra i dati teorici e sperimentali
4. studiare i residui. Devono avere le seguenti caratteristiche: media=0 , dev.standard=costante
5. studiarne la correlazione per verificare, anche graficamente, che non esiste relazione tra gli scarti, e quindi che il modello è il migliore
6. stimare i dati teorici col metodo numerico di Eulero, sia esplicito che implicito

**Codice Programma e relativo output**

**PARTE 1:**Trovare i parametri del modello di Gompertz:

```
(*Importare i dati da file e preparare le liste per studiarli*)
datiSperimentali={};
scarti={};
datiInput=Import["C:\Mattia\Calcolo\Crescita
celluletumorali\dati sperimentali\s9l30.txt","Table"];
For[i=1,i≤Length[datiInput],i++,
    datiSperimentali=Append[datiSperimentali,datiInput[[i,2]]];
    datiTeorici=Append[datiTeorici,datiInput[[i,3]]];
    scarti=Append[scarti,datiInput[[i,4]]];
   ];
listaY={};
For[i=1,i<Length[datiSperimentali],i++,
    listaY=Append[listaY,datiSperimentali[[i+1]]/
    datiSperimentali[[i]]];
   ];
listaY=Append[listaY,0];
listaLnX={};
For[i=1,i≤Length[datiSperimentali],i++,
    listaLnX=Append[listaLnX,Log[datiSperimentali[[i]]]];
  ];
tabella=Table[{i-1,datiSperimentali[[i]],datiTeorici[[i]],scarti[[i]],
listaLnX[[i]],(listaLnX[[i]])^2,listaY[[i]]},
{i,1,Length[datiSperimentali]}];
TableForm[tabella,TableHeadigs→
{None,{"t", "Xt", "X^T t", "at = Xt - X^T t", "ln Xt","ln Xt^2", "Y"}}]
```

| t | $X_t$ | $X^T_t$ | $e_t=X_t-X^T_t$ | Ln $X_t$ | Ln $X_t^{-1}$ | $Y_t$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 3.57 | 0.811011 | 2.75899 | 1.27257 | 1.61942 | 2.06443 |
| 1 | 7.37 | 1.86082 | 5.50918 | 1.99742 | 3.98968 | 1.47931 |
| 2 | 10.9025 | 3.76842 | 7.13408 | 2.38899 | 5.70728 | 1.32401 |
| 3 | 14.435 | 6.8635 | 7.5715 | 2.66966 | 7.12706 | 1.48944 |
| 4 | 21.5 | 11.4232 | 10.0768 | 3.06805 | 9.41295 | 1.33023 |
| 5 | 28.6 | 17.6104 | 10.9896 | 3.35341 | 11.2453 | 1.2986 |
| 6 | 37.14 | 25.4385 | 11.7015 | 3.61469 | 13.066 | 1.13032 |
| 7 | 41.98 | 34.7698 | 7.21016 | 3.73719 | 13.9666 | 1.25989 |
| 8 | 52.89 | 45.3432 | 7.5468 | 3.96821 | 15.7467 | 1.09293 |
| 9 | 57.805 | 56.8181 | 0.986882 | 4.05708 | 16.4599 | 1.08593 |
| 10 | 62.72 | 68.8229 | -6.10288 | 4.13868 | 17.1287 | 1.15673 |
| 11 | 72.55 | 80.9961 | -8.44615 | 4.28428 | 18.355 | 1.21296 |
| 12 | 88 | 93.0171 | -5.01708 | 4.47734 | 20.0465 | 1.2 |
| 13 | 105.6 | 104.623 | 0.9772 | 4.65966 | 21.7124 | 0.913826 |
| 14 | 96.5 | 115.615 | -19.1148 | 4.56954 | 20.8807 | 1.0943 |
| 15 | 105.6 | 125.857 | -20.2572 | 4.65966 | 21.7124 | 1.09896 |
| 16 | 116.06 | 135.27 | -19.2198 | 4.75402 | 22.6007 | 1.09005 |
| 17 | 126.5 | 143.819 | -17.3186 | 4.84024 | 23.4279 | 1.16522 |
| 18 | 147.4 | 151.505 | -4.10535 | 4.99315 | 24.9315 | 1 |
| 19 | 147.4 | 158.359 | -10.9586 | 4.99315 | 24.9315 | 1.25645 |
| 20 | 185.2 | 164.425 | 20.7754 | 5.22144 | 27.2634 | 0.928726 |
| 21 | 172 | 169.761 | 2.23908 | 5.14749 | 26.4967 | 1.15698 |
| 22 | 199 | 174.431 | 24.5691 | 5.2933 | 28.0191 | 1 |
| 23 | 199 | 178.5 | 20.5003 | 5.2933 | 28.0191 | 1 |
| 24 | 199 | 182.031 | 16.9687 | 5.2933 | 28.0191 | 1 |
| 25 | 199 | 185.087 | 13.9132 | 5.2933 | 28.0191 | 1.07337 |
| 26 | 213.6 | 187.723 | 25.8768 | 5.36411 | 28.7736 | 0.931648 |
| 27 | 199 | 189.993 | 9.00716 | 5.2933 | 28.0191 | 1 |
| 28 | 199 | 191.943 | 7.0572 | 5.2933 | 28.0191 | 1 |
| 29 | 199 | 193.615 | 5.38466 | 5.2933 | 28.0191 | 1 |
| 30 | 199 | 195.048 | 3.95211 | 5.2933 | 28.0191 | 1 |
| 31 | 199 | 196.273 | 2.7266 | 5.2933 | 28.0191 | 1 |
| 32 | 199 | 197.321 | 1.67926 | 5.2933 | 28.0191 | 1.07337 |
| 33 | 213.6 | 198.215 | 15.385 | 5.36411 | 28.7736 | 0.931648 |
| 34 | 199 | 198.978 | 0.0219677 | 5.2933 | 28.0191 | 1.07337 |
| 35 | 213.6 | 199.629 | 13.9713 | 5.36411 | 28.7736 | 0.96676 |
| 36 | 206.5 | 200.183 | 6.31686 | 5.3303 | 28.4121 | 0.965617 |
| 37 | 199.4 | 200.655 | -1.25548 | 5.29531 | 28.0403 | 0.967804 |
| 38 | 193 | 201.058 | -0.05769 | 5.26269 | 27.6959 | 0.959585 |
| 39 | 185.2 | 201.4 | -16.2001 | 5.22144 | 27.2634 | 1.07451 |
| 40 | 199 | 201.691 | --2.69142 | 5.2933 | 28.0191 | 1 |
| 41 | 199 | 201.939 | -2.93932 | 5.2933 | 28.0191 | 1.07337 |
| 42 | 213.6 | 202.15 | 11.4498 | 5.36411 | 28.7736 | 1 |
| 43 | 213.6 | 202.33 | 11.2705 | 5.36411 | 28.7736 | 1 |
| 44 | 213.6 | 202.482 | 11.118 | 5.36411 | 28.7736 | 1 |
| 45 | 213.6 | 202.612 | 10.9883 | 5.36411 | 28.7736 | 1 |
| 46 | 213.6 | 202.722 | 10.8781 | 5.36411 | 28.7736 | 0.867041 |
| 47 | 185.2 | 202.816 | -17.6157 | 5.22144 | 27.3634 | 1.15335 |
| 48 | 213.6 | 202.895 | 10.7047 | 5.36411 | 28.7736 | 0.931648 |
| 49 | 199 | 202.863 | -3.96303 | 5.1933 | 28.0191 | 1.07337 |
| 50 | 213.6 | 203.021 | 10.5794 | 5.36411 | 28.7736 | 0.982912 |
| 51 | 209.95 | 203.069 | 6.88052 | 5.34687 | 28.589 | 0.982615 |
| 52 | 206.3 | 203.111 | 3.18895 | 5.32933 | 28.4018 | 0.964615 |
| 53 | 199 | 203.146 | -4.14638 | 5.2933 | 28.0191 | 1 |
| 54 | 199 | 203.176 | -4.17639 | 5.2933 | 28.0191 | 1.07337 |
| 55 | 213.6 | 203.202 | 10.3981 | 5.36411 | 28.7736 | 0.931648 |
| 56 | 199 | 203.224 | -4.22358 | 5.2933 | 28.0191 | 1 |
| 57 | 199 | 203.242 | -4.242 | 5.2933 | 28.0191 | 1 |
| 58 | 199 | 203.258 | -4.25765 | 5.2933 | 28.0191 | 1 |
| 59 | 199 | 203.271 | -4.27095 | 5.2933 | 28.0191 | 1 |
| 60 | 199 | 203.292 | -4.29186 | 5.2933 | 28.0191 | 1.07337 |
| 61 | 213.6 | 203.3 | 10.3 | 5.36411 | 28.7736 | 0.867041 |
| 62 | 185.2 | 203.307 | -18.107 | 5.22144 | 27.2634 | 1 |
| 63 | 185.2 | 203.313 | -18.1128 | 5.22144 | 27.2634 | 1 |
| 64 | 185.2 | 203.318 | -18.1178 | 5.22144 | 27.2634 | 1 |
| 65 | 185.2 | 203.322 | -18.1221 | 5.22144 | 27.2634 | 1 |
| 66 | 185.2 | 203.326 | -18.1257 | 5.22144 | 27.2634 | 1.15335 |
| 67 | 213.6 | 203.329 | 10.2712 | 5.36411 | 28.7736 | 1 |
| 68 | 213.6 | 203.331 | 10.2686 | 5.36411 | 28.7736 | 0.931648 |
| 69 | 199 | 203.334 | -4.33361 | 5.2933 | 28.0191 | 1.07337 |
| 70 | 213.6 | 203.335 | 10.2645 | 5.36411 | 28.7736 | 0.951311 |
| 71 | 203.2 | 203.337 | -0.137097 | 5.31419 | 28.2406 | 0.948819 |
| 72 | 192.8 | 203.338 | -10.5385 | 5.26165 | 27.685 | 0.892116 |
| 73 | 172 | 203.34 | -31.3396 | 5.14749 | 26.4967 | 1.15698 |
| 74 | 199 | 203.341 | -4.34059 | 5.2933 | 28.0191 | 0.930653 |
| 75 | 185.2 | 203.341 | -18.1414 | 5.22144 | 27.2634 | 1.07451 |
| 76 | 199 | 203.342 | -4.34214 | 5.2933 | 28.0191 | 1 |
| 77 | 199 | 203.343 | -4.34274 | 5.2933 | 28.0191 | 0 |

[*Segue al n. 105*]

[•] Studenti del 5° anno dell'ITIS G. Marconi di Verona, corso di Informatica