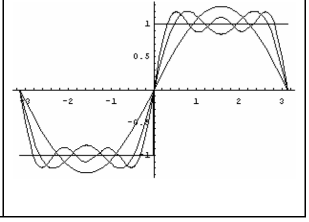
# MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore: Luciano Corso - Redazione: Luciano Corso, Elisabetta Capotosto - Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – 338 6416432
e-mail: lcorso@iol.it – Stampa in proprio - Numero 107 – settembre 2006


## Sulla probabilità soggettiva di Bruno De Finetti

di Luciano Corso

Il concetto soggettivistico di probabilità di un evento non è una innovazione del XX secolo. Già in precedenza illustri matematici avevano intuito l'idea giungendo anche a una sua definizione. Solo, però, nel XX secolo esso assunse una sistemazione teorica soddisfacente a opera di B. De Finetti (1906 - 1985), F. P. Ramsey (1903 - 1930), L. j. Savage (1954) e Johann Von Neumann (1903 - 1957).
Qui di seguito presento la definizione soggettivistica di probabilità di un evento come è stata proposta da Bruno De Finetti evidenziando che sulla base del *principio di coerenza* essa rispetta la teoria assiomatica di A. N. Kolmogorov.

Dato un evento $A\in\Omega$, la probabilità di $A$, e si scrive $P(A)$, è il *grado di fiducia* che una *persona coerente* ha del suo verificarsi.

La definizione non è ancora operativa. Resta infatti da definire il concetto di grado di fiducia e di persona coerente.

Secondo Bruno De Finetti il grado di fiducia di un evento $A$ è il *prezzo* che un individuo *coerente* ritiene equo pagare per ricevere 1 se l'evento si verifica e 0 se l'evento non si verifica. La *condizione di coerenza*, invece è data dal vincolo che le probabilità degli eventi devono essere attribuite in modo che non sia possibile ottenere con un insieme di scommesse una vincita certa o una perdita certa.

Si dimostra ora che la condizione di coerenza basta da sola a garantire il rispetto di tutte le condizioni per le quali una data misura sia una probabilità.

1) se $A$ è un evento certo e $P(A)$ la sua probabilità, allora si paga $P(A)$ per poter ricevere 1 se $A$ si verifica e 0 altrimenti. Poiché l'evento $A$ è certo per ipotesi, si riceverà di sicuro 1 pagando $P(A)$ e quindi il vantaggio sicuro è $1 - P(A)$, se $P(A) < 1$, e se $P(A) >1$, si avrebbe uno svantaggio certo sempre uguale a $1 - P(A)$, che in tal caso risulterebbe negativo; ma questi due casi sono stati esclusi per la condizione di coerenza e quindi $P(A) = 1$ (si ricordi che $A$ è un evento certo e quindi corrisponderebbe esattamente allo spazio campionario $\Omega$ e $P(\Omega) = 1$ in Kolmogorov (assioma di normalizzazione)).
2) Si osserva che pagando $P(A)$ e ricevendo o 1 o 0, il guadagno è o $1 - P(A)$ o $-P(A)$ e in tal caso avremmo una perdita. Se $P(A) < 0$ allora $1 - P(A)$ risulterebbe maggiore di 1 oppure $-(P(A))$ sarebbe positivo; in ogni caso avremmo un guadagno certamente positivo, contro la condizione di coerenza. Perciò $P(A) \geq 0$ (come in Kolmogorov).
3) Sia ora data una sequenza di eventi $A_1, A_2, \ldots, A_n$ relativi a una partizione di $\Omega$. In tal caso si dice che gli eventi sono necessari e incompatibili. Si vuole ora dimostrare che, basandoci sul principio di coerenza,

$$\sum_{k=1}^{n} P(A_k) = 1 .$$

Occorre qui considerare $n$ scommesse, una per ciascuno degli eventi $A_k$. Si paga quindi $P(A_k)$ per ricevere 1 se $A_k$ si verificherà e 0 altrimenti $\forall k$. Facendo la somma di quanto pagato dai giocatori si ha:

$$\sum_{k=1}^{n} P(A_k)$$

Poiché uno ed uno solo degli eventi $A_k$ si verificherà si riceverà 1 rispetto alla scommessa vincente e 0 altrove. Si ha:

$$\sum_{k=1}^{n} P(A_k) = 0 + \ldots + 0 + 1 + 0 + \ldots + 0 .$$

4) Dimostriamo, infine che la condizione di coerenza giustifica anche l'additività finita (3° assioma di Kolmogorov).

Prendiamo due eventi di $\Omega$: $A_j$ e $A_k$. Consideriamo poi gli eventi $A_j$, $A_k$, $\neg(A_j\cup A_k)$. Questi 3 eventi sono necessari e incompatibili e la loro unione è uguale a $\Omega$. Ma allora si ha:
$P(\Omega)=P(A_j\cup A_k\cup(\neg(A_j\cup A_k)) = 1$ per quanto visto appena sopra,
$P(A_j) + P(A_k) + P(\neg(A_j\cup A_k)) = 1$
Del resto è vero che: $(A_j\cup A_k)$ e $\neg(A_j\cup A_k)$ sono complementari tra loro. Per cui:
$P((A_j\cup A_k) + P(\neg(A_j\cup A_k)) = 1$
da cui:
$P(A_j\cup A_k) = P(A_j) + P(A_k)$.

La visione soggettivistica di De Finetti presenta quindi una perfetta corrispondenza con gli assiomi di Kolmogorov, tuttavia essa è stata sottoposta a forti critiche. La più importante è la seguente: anche se la condizione di coerenza impone il rispetto delle condizioni di calcolo relative alla teoria assiomatica, essa non garantisce l'oggettività della misura. Infatti, a parità di condizioni, due soggetti coerenti possono assegnare due probabilità diverse al verificarsi di un evento anche se lo stato d'informazione di entrambi risulta uguale. Inoltre, non tutto ciò che riguarda il mondo sperimentale può essere valutato in termini di prezzo e di conseguente rischio. Con questo modo di interpretare i fatti si può rappresentare solo una parte di quanto si muove nello spazio degli eventi naturali.


**Bibliografia**: [B.1] Bruno De Finetti (1970), *Teoria delle probabilità Vol. 1° e 2°*, Torino, Giulio Einaudi; [B.2] Giorgio Dall'Aglio (1987), *Calcolo delle Probabilità*, Bologna, Zanichelli; [B.3] Luciano Daboni (1980), *Calcolo delle probabilità ed elementi di statistica*, Torino, UTET; [B.4] Eugenio Regazzini (1996), *Problemi inerenti alla formulazione matematica della probabilità*, Verona, Atti del congresso nazionale della Mathesis (pagg. 101 – 110), [B.5] G. Landenna, D. Marasini, P Ferrari (1997), *Probabilità e variabili casuali*, Bologna, Il Mulino.


## Sulle tesi di Thomas Khun

di Carlo Marchiori [*]

Ho letto l'articolo di Giuliana Breoni sulle tesi di Kuhn (*MatematicaMente* n. 106). Sicuramente è appropriato dare loro spazio in quanto Kuhn è uno dei più famosi filosofi della scienza. Tuttavia io ritengo queste tesi prive di fondamento e spero che in un prossimo numero di matematicamente venga dato spazio ad altri punti di vista. Qui sotto spiego il mio.

Le teorie scientifiche nascono per descrivere un certo dominio di fenomeni naturali noti e misurati entro un certo errore di misurazione. Inizialmente una teoria risulta vera su questo dominio ed entro quella precisione di misura. Un esempio è la meccanica newtoniana riguardo alla descrizione dei moti dei pianeti. Successivamente possono venire scoperti nuovi fenomeni naturali non spiegabili dalla teoria fisica, oppure misurazioni più precise possono mettere in evidenza discrepanze tra le previsioni della teoria e la misurazione sperimentale. Nel caso della meccanica newtoniana, per esempio, ricade nel primo caso la scoperta che la velocità della luce non cambia per tutti i sistemi di riferimento come messo in evidenza dall'esperimento di Michelson-Morley; ricade nel secondo caso la discrepanza tra le previsioni della meccanica newtoniana e la realtà riguardante la precessione del pianeta Mercurio. Tuttavia la teoria continua a rimanere del tutto valida nel dominio di fatti iniziali ed entro gli errori di misura iniziale. Dunque una teoria nasce "debolmente vera" e continua ad esserlo. Questo confuta, oltre alle tesi di Kuhn, quelle di Popper riguardante la falsificazione delle teorie scientifiche. Infatti a tutt'oggi la meccanica newtoniana rimane in uso per un gran numero di attività, non ultima quella di calcolare le traiettorie delle sonde che vengono inviate nello spazio.

Una volta scoperti i limiti di una teoria scientifica (che dovrebbero essere considerati come implicitamente presenti fin dall'inizio anche se non noti), se il periodo storico e la cultura del tempo e del luogo lo permette, viene ricercata una teoria più accurata. È tipico, una volta scoperta questa nuova teoria, dimostrare che la vecchia teoria risulta un limite particolare della nuova. Einstein stesso dimostrò che la meccanica newtoniana è il limite della relatività ristretta per la velocità della luce che tende ad infinito, e il limite della relatività generale per campi gravitazionali deboli e lentamente variabili, e considerò questa dimostrazione come una prima e fondamentale verifica della teoria. È incomprensibile come la vecchia teoria possa essere il limite della nuova se, come dice Kuhn, le due teorie sono incommensurabili, non confrontabili, a causa di un cambiamento di paradigma.

Questo mette in luce l'opinabilità delle osservazioni di Kuhn. Un caso "paradigmatico", se Kuhn consente, è quello della rivoluzione copernicana. La teoria di Copernico viene considerata una teoria rivoluzionaria e un salto di paradigma. In realtà la teoria copernicana è in perfetta continuità con la teoria degli epicicli e deferenti sviluppata dai matematici greci ed ellenistici e detta tolemaica. Infatti la teoria di Copernico continua ad usare epicicli e deferenti, soltanto che il fatto di mettere il sole al centro degli epicicli invece che la terra permette di usarne in numero minore. Copernico stesso tra l'altro sapeva che Aristarco nel III secolo a.C. aveva proposto un sistema eliocentrico. Per inciso, con queste modifiche la teoria di Copernico risulta sperimentalmente MENO accurata della teoria tolemaica, anche se più semplice. Il fatto che "mettere il sole al centro" possa essere considerato una rivoluzione e che abbia suscitato una così dura reazione di contrasto è solo una dimostrazione del livello di sclerosi intellettuale della scolastica e della cultura dell'epoca.

[*] Laureato in Fisica - socio Mathesis

---

# «*Senatores boni viri, senatus mala bestia*»

di Vincenzo Zamboni

Riformuliamo il proverbio latino tramite un asserto più generale:« *Dato un gruppo sociale, una qualunque sua parte propria ha probabilità di costruire relazioni utili tra i suoi componenti maggiore di quella corrispondente al gruppo di cui è parte.*».

Un individuo isolato deve operare scelte per sé solo, cioè in relazione alle proprie necessità, caratteristiche, intelligenza, ecc. Deve, cioè, risolvere i problemi inerenti ad una relazione: quella con se stesso. In una coppia, ognuno dei due membri deve operare scelte in relazione con se stesso e con l'altro: deve risolvere i problemi inerenti a due relazioni. Per ogni individuo corrisponde una relazione. Dati 2 individui, ognuno ha una relazione con se stesso e con un altro per cui le relazioni sono $2^2 = 4$. Se gli individui sono 3, allora le relazioni sono $3^2 = 9$. Definiamo *complessità*, C, il numero di relazioni di un gruppo. In un gruppo di $n$ individui, ogni individuo deve affrontare $n$ relazioni .Nel gruppo esistono $n^2$ relazioni. Diciamo $P_{ik}$ la probabilità di buon esito della relazione (cioè la probabilità che siano risolti i problemi che essa pone).

La probabilità di buon esito della relazione di un individuo isolato (relazione con se stesso) è $0 \le P_{ik} \le 1$. La probabilità di esito soddisfacente delle $k$ scelte di un individuo entro un gruppo di $n$ individui è

$$\prod_{i=1}^{n} P_{ik} \ ;$$

mentre la probabilità che tutte le relazioni esistenti nel gruppo abbiano successo è

$$\prod_{k=1}^{n}\prod_{i=1}^{n} P_{ik} \ .$$

Essendo le $P_{ik} \le 1$, è evidente che l'aumento (quadratico) della complessità al variare di $n$ ($C = n^2$) porta ad una enorme diminuzione di efficienza.
Ad esempio, nell'ipotesi che tutte le $P_{ik}$ abbiano eguali probabilità di buon esito, pari a ½
$P_{ik} = ½ \equiv P$ per ogni $i, k$ .
Considerando un gruppo di due persone, l'efficienza di ognuno risulta

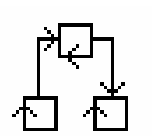
$$\prod_{i=1}^{n} p_{ik} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

e quella di una doppia coppia

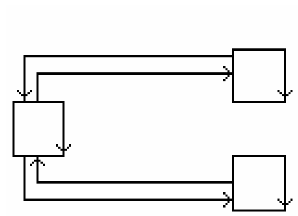
$$\prod_{k=1}^{2}\prod_{i=1}^{2} P_{ik} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{16} \ .$$

In una famiglia di 4 persone l'efficienza individuale ( $E_1$) si riduce a $E_1 = (1 / 2)^4 = 1 / 16$ e quella globale $E_{tot} = (1 / 2)^{16} = 0{,}0000152587 \ldots$

Camera e Senato della Repubblica riuniti, includendo circa 900 individui, danno origine a ben ~ 900² = 810.000 relazioni con le conseguenze del caso sulla buona riuscita. Il che giustifica l'asserto iniziale. Sono, naturalmente, possibili delle strategie migliorative. La più semplice si fonda sul fatto che $n^2$ è il numero massimo di relazioni istituibili entro un gruppo, ma non l'unico numero. Affinché il gruppo umano sia un insieme connesso non è necessario che ogni elemento sia correlato con tutti gli altri, e si può perciò diminuire la complessità fino ad un minimo di $C_{min} = n - 1 + n = 2n - 1$. Infatti, nessuno può eliminare la relazione con se stesso, ma se ognuno mantiene una sola relazione con un altro, possiamo ottenere una struttura del tipo (per $n = 3$):



Le frecce indicano le relazioni, i quadretti gli individui. Questo caso minimo rende possibile solo una comunicazione gerarchica unidirezionale. Tuttavia, con una struttura ($n = 3$) del tipo



è assicurata la comunicazione (per interposta persona) di ogni elemento con ogni altro. La complessità è abbassata a: $C_n = 2\ (n - 1) + n = 3\ n - 2$; $C_3 = 7$. Supponendo che in Parlamento ogni eletto abbia relazioni significative solo con un sottogruppo di $k = 30$ persone, la complessità si abbassa a
$C_{k\,n} = k\,n + n = 30\,n + n = 31 \cdot 900 = 27.900$
e l'efficienza conseguentemente migliora.

Da questa analisi si deduce che per ottimizzare la riuscita della nostra vita sociale è necessario sia mantenere la quantità di relazioni con il prossimo entro il numero più basso ritenuto indispensabile, sia selezionare le relazioni in modo da massimizzare la probabilità di riuscita. Evidentemente i grossi gruppi servono solo come base per le future scelte selettive.