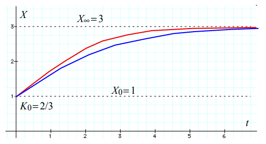
MatematicaMente



Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore: Luciano Corso - Redazione: Luciano Corso, Elisabetta Capotosto, Arnaldo Vicentini - Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – 338 6416432
e-mail: lcorso@iol.it – Stampa in proprio - Numero 108 – ottobre 2006

Relazione tra una grandezza e le sue approssimazioni razionali: un primo problema

di Ruggero Ferro

[*Segue dal n.* 104] Ora che si sono viste le proprietà principali dei due insiemi di numeri razionali X ed Y, che costituiscono una sezione di Dedekind, torniamo al problema di vedere se e come i due insiemi delle approssimazioni razionali per difetto e per eccesso di una grandezza possano determinare la grandezza stessa e la sua misura. Sicuramente la grandezza dovrà essere maggiore od uguale di tutte le sue approssimazioni razionali per difetto e minore di tutte le sue approssimazioni razionali per eccesso: una grandezza di tale tipo verrà detta elemento separatore di quella sezione di Dedekind. Ma (problema A) è unica la grandezza in questa situazione? Detto altrimenti, è unico l'elemento separatore di una sezione di Dedekind? Non solo, ma anche, se ci sono due insiemi non vuoti di numeri razionali che formano una sezione di Dedekind, anche se questi non sono determinati dai tentativi di approssimare una grandezza nota per altra via, c'è (problema B) almeno un elemento separatore, cioè una grandezza maggiore od uguale di tutte grandezze ottenute moltiplicando l'unità di misura per i numeri del primo insieme della sezione di Dedekind e minore di tutte le grandezze ottenute moltiplicando l'unità di misura per tutti i numeri del secondo insieme della sezione di Dedekind?

Cominciamo con l'affrontare il problema A.
Si supponga che ci siano più di una grandezza maggiore, o uguale, di tutte le approssimazioni razionali per difetto e minore di tutte le approssimazioni razionali per eccesso di una certa grandezza data. Dalle proprietà viste segue che la differenza tra la più grande M e la più piccola P di due tali grandezze tra loro diverse (per cui la differenza sarà maggiore di zero) deve essere minore di tutte le grandezze ottenute moltiplicando l'unità di misura U per $1/n$, qualsiasi sia il numero naturale n, diverso da 0. Infatti qualunque sia il numero naturale n diverso da 0, sappiamo che a X e a Y appartengono due numeri razionali, q_1 e q_2 rispettivamente, tali che la differenza q_2-q_1 è minore di $1/n$; dunque $q_1U \leq P < M \leq q_2U$, sicché $M - P < (q_2 - q_1)U < (1/n)U$, come si voleva dimostrare.

Anche se non siamo abituati a considerare grandezze positive minori di $(1/n)U$ per ogni numero naturale n, non è contraddittorio che esse esistano (vengono chiamate grandezze infinitesime positive), anzi, se ce ne è almeno una, allora ce ne sono infinite, dal momento che la moltiplicazione di una tale grandezza (di cui si sta supponendo l'esistenza) per un qualsiasi numero naturale fornisce una grandezza positiva minore di $(1/m)U$ per ogni numero naturale m. Infatti sia δ una grandezza positiva minore di $(1/n)U$ per ogni numero naturale n, e k un qualsiasi numero naturale, si vuole far vedere che anche $k\delta$ è minore di $(1/m)U$ per ogni numero naturale m. Allo scopo si osservi che fissato un m ad arbitrio, bisogna far vedere che $k\delta < (1/m)U$, il che equivale a mostrare che δ è minore di $(1/(k{\times}m))U$, il che è vero dal momento che δ è minore di $(1/n)U$ per ogni naturale n, ed in particolare anche quando n è uguale a $k{\times}m$.

Le grandezze infinitesime, se si suppone che esistano, oltre ad essere tante, e ciascuna minore di $1/n$ per qualsiasi numero naturale n, si fa fatica a capire quanto sono piccole come emerge dalle seguenti considerazioni. Sia δ un infinitesimo positivo, cosa si può dire di $\delta \times \delta = \delta^2$? Sicuramente è minore di δ/n per ogni naturale n, sicché si può opportunamente dire che è un infinitesimo rispetto a δ. Di più, δ potrebbe già essere un infinitesimo rispetto ad un altro infinitesimo. Allora diventa difficile saper precisare quanto è piccolo δ, Però il fatto più delicato in questo contesto è che due tali grandezze infinitesime positive non si possono distinguere frapponendo tra loro grandezze commensurabili con l'unità di misura: infatti una qualsiasi grandezza commensurabile, se positiva, è maggiore di entrambe le grandezze che si vorrebbero separare (perché, come si è visto, ogni grandezza positiva commensurabile con l'unità di misura è maggiore di $1/n$ per qualche opportuno numero naturale n), mentre, se è negativa, è minore di entrambe le grandezze che si vorrebbero separare, che sono positive. Così, anche se si può legittimamente supporre l'esistenza di queste grandezze infinitesime positive, non si sa apprezzare la loro grandezza confrontandola con una partizione in un numero naturale (finito) di parti, tra loro uguali, dell'unità di misura: sono grandezze positive ma così piccole (si potrebbe dire assolutamente piccole, e la parola assolutamente è adeguata perché, per quanto le si moltiplichi per un numero naturale, rimangono infinitesime), tanto piccole che non si riescono ad apprezzare confrontandole commensurabilmente con l'unità di misura, sicché si potrebbero trascurare, si potrebbe pensare che non ci siano. Due grandezze si dicono <u>infinitamente vicine</u> se la differenza tra la maggiore delle due e la minore è o un infinitesimo positivo o 0. Si noti che la relazione di infinita vicinanza è una relazione di equivalenza. Si noti che, proprio poiché non si riescono a distinguere infinitesimi positivi separandoli mediante grandezze commensurabili con l'unità di misura, altrettanto non si possono distinguere tra loro grandezze infinitamente vicine separandole mediante grandezze commensurabili con l'unità di misura.

Di fatto l'affermazione che "tra l'insieme delle approssimazioni per difetto e l'insieme delle approssimazioni per eccesso di una grandezza c'è solo quella grandezza" corrisponde esattamente all'ipotesi che non ci siano grandezze positive infinitesime. Si noti che questa ipotesi di mancanza di grandezze infinitesime positive è pure legittima potendosi dimostrare l'equiconsistenza tra un sistema in cui si suppone la mancanza di grandezze infinitesime positive con un sistema in cui si ipotizza l'esistenza di grandezze infinitesime positive: se esistono le grandezze infinitesime positive le classi di equivalenza rispetto alla relazione di infinita vicinanza possono essere riguardate come un sistema di grandezze senza grandezze infinitesime positive (di tutte le grandezze tra loro infinitamente vicine se ne è fatta una sola, la loro classe di equivalenza, e in particolare di tutte quelle infinitamente vicine a 0 si è fatta una sola classe, corrispondente a 0, che include tutti gli infinitesimi positivi, che così sono spariti), mentre da un sistema di grandezze senza grandezze infinitesime positive se ne può ottenere uno con grandezze infinitesime positive come modello non standard della teoria del primo utilizzando i metodi della logica. Così l'esistenza o meno di grandezze infinitesime positive è una scelta arbitraria di quali grandezze vadano considerate, di quale visione della nozione di grandezza si vuole adottare.

L'atteggiamento di escludere le grandezze infinitesime positive corrisponde al voler controllare le varie grandezze attraverso processi finiti. Infatti in questo caso due grandezze diverse (una minore che indicheremo con B e una maggiore che indicheremo con A) sono sempre separabili frapponendo tra le due una grandezza C che è un multiplo razionale dell'unità di misura. Infatti considerate due arbitrarie grandezze tra loro diverse, la sezione di Dedekind corrispondente ad una di esse dovrà essere diversa dalla sezione di Dedekind corrispondente all'altra, sicché ci sarà almeno una grandezza C, commensurabile con l'unità di misura, che è una approssimazione per difetto della grandezza A e approssimazione per eccesso dell'altra B, e dunque sarà $B < C < A$ e questa grandezza C avrà separato le altre due. Il fatto che due qualsiasi grandezze possano essere separate da una grandezza commensurabile con l'unità di misura va sotto il nome di densità delle grandezze che sono multipli razionali dell'unità di misura nell'insieme delle grandezze, ed è una conseguenza, come si è visto, dell'esistenza di al più una grandezza compresa tra le approssimazioni per difetto e quelle per eccesso, cioè dell'ipotesi di non esistenza di infinitesimi, cioè dell'archimedeità che afferma, in una delle sue molte enunciazioni equivalenti, che non c'è nessuna grandezza positiva minore di tutte le grandezze del tipo $(1/n)U$, con n numero naturale qualsiasi e U unità di misura, ossia che per ogni grandezza positiva A esiste un numero naturale n_A tale che $(1/n_A)U < A$.

Attenzione all'uso della parola denso che potrebbe portare ad equivoci. Si era parlato prima di ordine denso, cioè di un ordine in cui tra due elementi ce n'è sempre un terzo strettamente compreso tra i due. L'ordine dei numeri razionali è denso perché dati comunque due numeri q_1 e q_2 razionali, con ad esempio $q_1 < q_2$, la loro semisomma $(q_1 + q_2) / 2$ è strettamente compresa tra i due, $q_1 < (q_1+q_2) / 2 < q_2$, ma, come si è detto, supponiamo denso anche l'ordine tra grandezze, come conseguenza della sua continuità. Altra cosa è la densità di un sistema di grandezze in un altro sistema di grandezze, definita poco fa, che prevede che due elementi del sistema che include l'altro siano sempre separabili mediante elementi del sistema contenuto. Comunque nessuna delle due nozioni di densità coglie la continuità. L'esclusione delle grandezze infinitesime, consente, anche, quasi di misurare contando, nel senso che si accetta che una grandezza sia determinata dal complesso delle sue infinite approssimazioni razionali e queste si ottengo contando in quante parti uguali si deve dividere l'unità di misura e contando quante di queste parti devono essere considerate.

Queste ultime osservazioni mettono in evidenza i vantaggi di scegliere che i due insiemi di una sezione di Dedekind individuino al più una grandezza. Sicché è ragionevole scegliere che ci sia un'unica grandezza privilegiata individuata da una sezione di Dedekind, ma ciò è compatibile con l'idea che ci possano essere anche altri elementi maggiori delle approssimazioni per difetto e minori delle approssimazioni per eccesso di una certa grandezza, elementi che potranno essere considerati quando i problemi da affrontare lo potranno richiedere, ad esempio nello studio della velocità (ma ora non vogliamo affrontare tale tema). La scelta che una sezione di Dedekind determini al più un elemento separatore è la scelta che viene detta archimedea in quanto già effettuata da Archimede per giustificare l'applicazione del metodo di Eudosso. Questa scelta è caratteristica nella determinazione dei numeri reali.
[*Segue al n.* 111]

Equazione differenziale di Gompertz e modello di crescita di popolazione

di Arnaldo Vicentini

1. Introduzione

Mentre leggevo tempo fa "*Un'applicazione dell'equazione differenziale di Benjamin Gompertz*" (V. *Matematicamente* n. 102, apr. 06) mi venivano da fare due critiche: una, in un certo senso di natura "didattica", era sull'approccio alla soluzione dell'equazione differenziale là discussa; l'altra era sulla adeguatezza del modello assunto per la crescita d'una popolazione biologica. In questa nota senza pretese intendo appunto comunicare i pensieri che quell'articolo mi ha allora suscitato. Perciò essa riprende l'equazione di Gompertz per risolverla con altro approccio per passare alla critica del modello di popolazione e proporne un altro che mi pare più adeguato.

2. Discussione formale del problema.

Sia β una costante positiva, $X(t)$ e $K(t)$ siano funzioni derivabili che soddisfano il seguente sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{aligned} \frac{dX(t)}{dt} &= K(t)\cdot X(t); \\ \frac{dK(t)}{dt} &= -\beta\cdot K(t). \end{aligned} \qquad (1)$$

Sia $f(t)$ una funzione derivabile, A sia una costante e sia
$F(t) = A\mathrm{e}^{f(t)}$.

Allora:

$$\frac{dF(t)}{dt} = \frac{df(t)}{dt}\cdot A\mathrm{e}^{f(t)} = \frac{df(t)}{dt}\cdot F(t).$$

La soluzione generale della prima del sistema (1) è dunque del tipo

$$X(t) = A\mathrm{e}^{f(t)}$$

con $f(t)$ primitiva di $K(t)$ ossia:

$$f(t) = f_0 + \int_0^t K(\tau)d\tau\,;\; X(t) = A\mathrm{e}^{f(t)}\;, \qquad (2)$$

dove f_0 ed A sono costanti arbitrarie.
Dalla seconda del sistema (1) si ricava

$$K(t) = K_0\mathrm{e}^{-\beta t},$$

per cui dalla (2) si ha

$$f(t) = f_0 + (K_0/\beta)(1-\mathrm{e}^{-\beta t})$$

e in definitiva:

$$\begin{aligned} X(t) &= A\mathrm{e}^{f(t)} = A\mathrm{e}^{f_0}\cdot \mathrm{e}^{\left[\frac{K_0}{\beta}\left(1-\mathrm{e}^{-\beta t}\right)\right]} = X_0\cdot \mathrm{e}^{\left[\frac{K_0}{\beta}\left(1-\mathrm{e}^{-\beta t}\right)\right]}\;; \qquad (3) \\ K(t) &= K_0\mathrm{e}^{-\beta t}. \end{aligned}$$

NB. Nelle (3) si è posto $X_0 = X(0) = A\cdot\exp[f_0]$ e $K_0 = K(0)$.
Osservazione: La funzione $X(t)$ è monotona crescente ma limitata superiormente. Al tendere di t all'infinito, $X(t)$ tende asintoticamente al valore

$$X_\infty = X_0\cdot\mathrm{e}^{K_0/\beta}.$$

Con questa nuova costante per cui $\beta = K_0 / \ln(X_\infty/X_0)$, le (3) diventano:

$$\begin{aligned} X(t) &= X_\infty \mathrm{e}^{-\ln(X_\infty/X_0)\mathrm{e}^{-[K_0/\ln(X_\infty/X_0)]t}}; \\ K(t) &= K_0\mathrm{e}^{-[K_0/\ln(X_\infty/X_0)]t}. \end{aligned} \qquad (4)$$

[*Segue al numero 109*]

Della scuola e delle teorie didattiche

In questi anni ne ho sentite di teorie sulla didattica e sulle qualità che dovrebbero possedere i docenti per essere buoni educatori. Ora le scuole fanno a gara per impostare metodi di formazione razionali. Ma gli studenti ricevono di più da questo sforzo di adeguamento dei docenti alle moderne tecniche della didattica? Non lo so. Lessi, qualche tempo fa, uno scritto di un anonimo maestro europeo del XV secolo, che in poche parole riassume con grande saggezza ciò che deve essere il requisito fondamentale di ogni buon docente.

Esso dice:
«*Quidquid docetur aut discitur non obscurum sit aut confusum, sed clarum, distinctum, articulatum tamquam digiti manuum*».
Capita la lezione? (*L. Corso*)