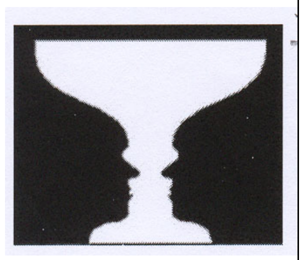
MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore: Luciano Corso - Redazione: Luciano Corso, Elisabetta Capotosto, Arnaldo Vicentini - Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – 338 6416432
e-mail: lcorso@iol.it – Stampa in proprio - Numero 109 – novembre 2006



SIMMETRIA SPECULARE E DUALITÀ

di Paolo Di Sia (*)

La teoria delle stringhe rende più saldi i nessi tra la fisica e la geometria; le proprietà delle stringhe vibranti sono determinate infatti in ampia misura dalle proprietà delle componenti compattificate dello spazio. In tali teorie può accadere che una circonferenza di raggio R e una di raggio $1 / R$ siano indistinguibili da un punto di vista fisico; le **masse** e le **cariche** delle particelle in un universo di raggio R risultano le stesse di quelle in un universo di raggio $1 / R$. Questo aspetto "curioso" deriva da considerazioni riguardanti lo spettro degli stati di stringa. Non sussiste **distinzione fisica** tra le due forme geometriche distinte (valore grande o piccolo del raggio della dimensione supposta circolare). I due universi risultano geometricamente diversi, ma fisicamente indistinguibili. Consideriamo ora le 3 dimensioni macroscopiche ordinarie; se le supponiamo di forma circolare (l'assunzione che tutte le dimensioni spaziali dell'universo siano circolari può risultare compatibile con l'aspetto osservato dell'universo a condizione che il raggio delle tre dimensioni spaziali macroscopiche sia così grande da superare il potere della attuale strumentazione a disposizione), possono essere soggette all'identificazione $R - 1/R$ della teoria. Se R è circa $15 \cdot 10^9$ anni luce (a.l.) (valore pari a 10^{61} lunghezze di Planck (l_{Pl})), in base a quanto precedentemente detto tale scenario risulta essere fisicamente identico ad un universo con le tre dimensioni spaziali ordinarie che risultano essere circonferenze di raggio R dell'ordine di 10^{-61} l_{Pl}.

Si indicano con il nome di **varietà speculari** (mirror manifolds) le coppie di spazi di *C-Y* (spazi dove si ritengono compattificate le rimanenti dimensioni previste dalle teorie di stringa) che sono fisicamente equivalenti, nonostante siano matematicamente distinti. Due spazi con tale caratteristica non sono l'immagine speculare l'uno dell'altro nel senso ordinario del termine; hanno proprietà geometriche diverse, ma danno origine allo stesso universo se vengono utilizzati per compattificare le dimensioni extra della teorie di stringa. Si parla perciò in questo caso di **simmetria speculare** (mirror simmetry).

Il concetto di **dualità** entra in gioco in riferimento a modelli teorici che, pur apparendo del tutto distinti, descrivono esattamente la stessa fisica. Esempi di dualità sono: 1) due universi, con dimensione circolare rispettivamente di raggio $\boldsymbol{R}$ e $\boldsymbol{1/R}$: le proprietà delle stringhe implicano identiche situazioni fisiche; 2) simmetria speculare: due diversi modi di compattificare le dimensioni extra in uno spazio di *C-Y*; si hanno le stesse proprietà fisiche. La dualità permette (tra le altre caratteristiche) di sottoporre a prova nuove idee fisiche. I teorici delle teorie di stringa, tra i quali in particolare Edward Witten (fisico teorico i cui risultati e le cui teorie hanno avuto un impatto considerevole sulla matematica contemporanea; grazie anche e soprattutto alle sue ricerche negli ultimi vent'anni la fisica è nuovamente diventata una potente fonte di ispirazione e di idee per la matematica), hanno mostrato che le cinque teorie di stringa elaborate risultano essere modi diversi di descrivere una stessa teoria fisica fondamentale. Tali teorie sono **duali**, con il seguente significato: considerate due di esse, scelte tra le cinque possibili, cambiano l'una nell'altra se facciamo variare le loro costanti di accoppiamento. Quindi **tutte** le teorie di stringa sono descrizioni duali di un'unica struttura di base.

[Segue al numero 110]

(*) disia@sci.univr.it

LA FISICA E LA DINAMICA DELLA SCIENZA

di Luciano Corso

Il giorno 7 dicembre 2006 presso l'aula magna dell'Accademia di Agricoltura, Scienze e Lettere di Verona, Carlo Rovelli (veronese di origine), fisico e docente presso l'Université de la Mediteranée de Marseille (Francia) e della Pittsburgh University (Pa USA), uno dei massimi esperti mondiali di gravità quantistica, in occasione della sua nomina a socio onorario della prestigiosa istituzione culturale veronese, ha tenuto una lezione, in una sala gremita di pubblico, sull'*evoluzione dei concetti di spazio e tempo*, seguendo un filone assai impegnativo: quello degli eventi concettuali più significativi della conoscenza della fisica. Tralasciando quanto esposto sul periodo prenewtoniano, degna di nota è la riflessione su come si è evoluta l'idea di spazio da Newton a oggi. Come è noto per Newton lo spazio era un'entità fisica esistente in sé, indipendentemente da oggetti che ne facessero percepire l'esistenza. Non era necessario cioè che ci fossero masse per caratterizzarne l'essere. Questa tesi ha dato origine all'idea che i campi, sia quelli gravitazionali, sia quelli elettromagnetici, fossero "sovrapposizioni" dello spazio. Lo spazio era la realtà geometrica della natura; i campi erano la struttura fisica dello spazio. Questa idea era condivisa da Einstein il quale sviluppò su di essa la teoria della relatività generale. Una massa inserita nello spazio veniva sollecitata da un campo, quello gravitazionale. Una carica elettrica, similmente, posta nello spazio era sottoposta a un campo elettrico. Ma i campi esistono comunque, indipendentemente da masse o da cariche, anche se masse e cariche ne fanno percepire l'esistenza. Viene perciò considerata una proprietà dello spazio quella di essere campo. Questo risultato appare anomalo rispetto a quanto si legge in Feynman [B.1] dove la definizione di campo passa dalla necessità di avere nello spazio o una massa o una carica elettrica. Data una massa m_1, posta in un spazio s, nasce un campo, inteso come sistema di punti e forze dello spazio che si manifestano su ogni altra massa m_2 collocata in s o in movimento in s. Il linguaggio della fisica risulta abbastanza strano nella definizione di campo. Sempre in [B.1] il concetto viene espresso nel modo seguente: «$\boldsymbol{C}$, campo gravitazionale, è la "condizione" prodotta da m_1 e F (Forza) è la risposta data da m_2 a $\boldsymbol{C}$». Il campo gavitazionale è un vettore e si esprime nella relazione seguente: $\boldsymbol{C} = -G \cdot m_i \cdot \boldsymbol{r}_i / r_i^3$ (simboli i cui significati sono noti in fisica). La forza $\boldsymbol{F}$ su m_2 è data da: $\boldsymbol{F} = m_2\, \boldsymbol{C}$. Se in s vi sono più masse allora $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{C}_1 + \boldsymbol{C}_2 + \ldots$ Quest'ultima relazione è nota come "principio di sovrapposizione dei campi". Mentre per il campo elettrico questo principio tiene molto bene, non è così per il campo gravitazionale. In fisica la teoria dei campi, perciò, non è da tutti condivisa. La scienza trova ragioni per migliorarsi dalla debolezza delle teorie e dal confronto con nuovi principi. Così, si sta passando dallo spazio inteso come campo, allo spazio inteso come struttura su cui si manifestano delle relazioni tra oggetti fisici. E che cos'è il tempo? Esistono filoni di pensiero divergenti sull'idea di tempo. Attualmente tra i ricercatori viene condivisa prevalentemente l'idea che il tempo sia una relazione tra variabili fisiche e che non sia, in generale, una "freccia" con un unico verso (dal passato al futuro), come tendenzialmente viene proposto dal 2° principio della termodinamica (entropia).

Infine, in fisica un settore della ricerca si pone il problema di correlare la teoria della relatività generale con i principi della meccanica quantistica per giungere a una soddisfacente sistemazione della "gravità quantistica".

Ora è a questi livelli che si muove un consistente settore della ricerca e C. Rovelli.

[B.1] R. P. Feynman (2001), *La fisica di Feynman* 1, Zanichelli, Bologna

La Terra vista dal cielo.
Foto eseguita dall'equipaggio dell'Apollo 17 durante il viaggio Terra-Luna (dicembre 1972)
[This photo was taken in December 1972 by the Apollo 17 crew.
The spacecraft was traveling between the Earth and the Moon.
The redish landmass is Africa and Saudi Arabia which is desert.
The white is both clouds and the ice covering Antarctica.
(Courtesy NASA/JPL).

«*La Terra è rotonda e sospesa nel vuoto*». Anassimandro (500 a.C.) arrivò per primo a questa conclusione. Questa idea, comunque è sempre stata accettata da chi si è interessato di fisica e di geografia. Platone, nel Fedone, fa dire a Socrate che la Terra è tonda. Anche nella "Summa Theologica" di Tommaso D'Aquino si dice che la Terra è tonda. Anche nella Divina Commedia, Dante assume che la Terra sia tonda. La concezione che la Terra fosse piatta pare una banalizzazione popolare, non riscontrabile nei ricercatori del passato. Tolomeo non credette mai a una simile stupidaggine. Un'altra idea deformata è che "i corpi cadono a terra"; in realtà l'idea corretta condivisa in passato dalla maggior parte dei filosofi era che "*i corpi cadono verso il centro delle Terra*".

Sul concetto di razionalità

Il termine "razionale" ha due significati distinti. Il primo è riferibile all'idea di rapporto, misura e quindi è persona razionale chi sa, di fronte a un problema, misurare, rapportare bene il risultato alle procedure per conseguirlo. Il secondo è di natura prettamente economica: un comportamento razionale è quello che di fronte a un obiettivo da raggiungere, fa corrispondere efficacia (la procedura lo raggiungerà con il più alto grado di affidabilità) ed efficienza (cioè massimo risultato con il minimo costo possibile) nel conseguirlo. Per esempio, di fronte a un problema di matematica, un ragazzo nel risolverlo è più o meno razionale a seconda che segua un percorso a minimo numero di passaggi nel rispetto dell'obiettivo da raggiungere (la necessaria risoluzione del problema, appunto) e a parità di condizioni (*L.C.*).

Campagna soci 2007

Vi invitiamo a rinnovare l'iscrizione alla Mathesis sezione di Verona per l'anno 2007. Le quote sono: 40 euro per i soci ordinari, 60 euro per gli enti e le scuole, 7 euro per chi non è della sezione di Verona e vuole ricevere MatematicaMente. Sostenete la Mathesis e MatematicaMente!

Equazione differenziale di Gompertz e modello di crescita di popolazione

di Arnaldo Vicentini

[*Segue dal numero 108*]

Modello di crescita d'una popolazione biologica

Le (3) interpretano matematicamente il modello di una popolazione $X(t)$ che al passare del tempo cresce con un tasso relativo $(dX/dt)\ X = K$ inizialmente di valore K_0 ma decrescente esponenzialmente nel tempo.

Secondo me, un tale modello non è affatto adeguato per una popolazione biologica. In questo modello, infatti, il tasso di crescita è funzione (decrescente) diretta del tempo, senza che ci sia un nesso tra il tasso di crescita K ed il valore attuale della popolazione. Sicché, il valore limite X_∞ della popolazione non è un dato assoluto di saturazione dell'ambiente (che di più non può ospitare) ma un valore in un preciso rapporto con il valore iniziale X_0. Mi pare molto più appropriato un modello in cui il valore X della popolazione, partendo da qualsiasi valore iniziale X_0, tende comunque al valore stazionario X_∞ con un tasso relativo $K = (dX/dt)\ / X$ che dipende dal valore attuale X della popolazione ed è tanto più rilevante quanto più la popolazione è lontana dal valore limite ed invece è infinitesimo al tendere della popolazione al valore limite X_∞.

Supponiamo ad esempio che K dipenda linearmente dallo scarto di X dal valore stazionario X_∞. Il sistema di equazioni da risolvere è allora:

$$\frac{dX(t)}{dt} = K(t)\cdot X(t);\ \ K(t) = \alpha\cdot(1 - X(t)/X_\infty). \qquad (5)$$

Inserendo la seconda di (5) nella prima abbiamo l'equazione differenziale non lineare

$$\frac{dX}{dt} = \alpha\cdot X(1 - X/X_\infty) \qquad (6)$$

facilmente risolubile per integrazione separando le variabili:

$$\frac{X_\infty}{X(X_\infty - X)}dX = \alpha\cdot dt \ \Rightarrow\ \ln\left[\frac{X}{X_\infty - X}\right] = \alpha\cdot t + \gamma.$$

Se indichiamo con X_0 il valore iniziale della popolazione (per t= 0), ricaviamo $\gamma = \ln[X_0/(X_\infty - X_0)]$ e quindi:

$$\ln\left[\frac{X(X_\infty - X_0)}{X_0(X_\infty - X)}\right] = \alpha t \Rightarrow\ X(t) = \frac{X_\infty X_0}{(X_\infty - X_0)\mathrm{e}^{-\alpha t} + X_0} \qquad (7)$$

Detto K_0 il valore di K quando è $X = X_0$, ricaviamo:

$$K_0 = \alpha\cdot(1 - X_0/X_\infty)\ \Rightarrow\ \alpha = K_0 X_\infty/(X_\infty - X_0).$$

Con ciò la (7) diventa:

$$X(t) = \frac{X_\infty X_0}{(X_\infty - X_0)\mathrm{e}^{-K_0[X_\infty/(X_\infty - X_0)]t} + X_0}. \qquad (8)$$

Si possono allora confrontare tra loro la (4) e la (8). Nella figura seguente, la curva in blu rappresenta la (4) e quella in rosso la (8): entrambe per X_0=1; X_∞=3; K_0=2 / 3.