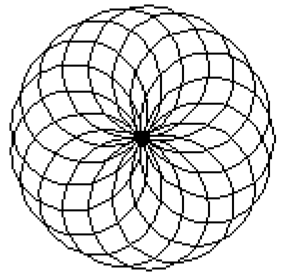
MATHESIS

Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche
Fondata nel 1895

Sezione di Verona

Redazione: Luciano Corso, Luigi Marigo, Elisabetta Capotosto – Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045)8344785 - Numero 11 - novembre 1998



Economia: un problema di equilibrio

di Luciano Corso

Affrontiamo un problema di equilibrio dinamico di mercato. In un dato mercato nel quale operavano 5 importanti aziende, la produzione ed il consumo di tonno in scatola, al variare del prezzo, sono espressi nella tabella A:

Mercato del tonno (Tab. A)		
Prezzo in lire/kg	Domanda in kg	Offerta in kg
9.000	90.000	28.000
11.000	72.000	38.000
14.000	56.500	40.000
17.000	31.000	55.000
18.000	29.000	55.200
Totali	278.500	206.200

Supposto che il modello teorico che rappresenta meglio la domanda e l'offerta in funzione del prezzo sia – almeno nel breve periodo - di tipo lineare [$y(p)=a+b\cdot p$] e che la stima dei parametri di tale modello sia fatta col metodo dei minimi quadrati, si determini: 1) la funzione della domanda; 2) la funzione dell'offerta; 3) il punto di equilibrio del mercato (quantità-prezzo); 4) l'elasticità puntuale della domanda e dell'offerta; 5) i valori di tali elasticità nel punto di equilibrio. 6) Qualora un fatto straordinario portasse ad un momentaneo squilibrio si potrebbe, in base ai dati sotto osservazione, pensare ad un ritorno successivo all'equilibrio? Perché?

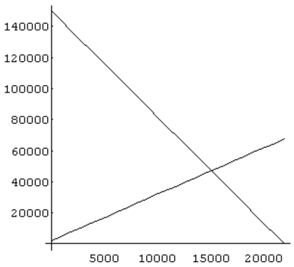


Fig. 1

Risoluzione: Poniamo $d(p)=a_1+b_1\cdot p$ e $o(p)=a_2+b_2\cdot p$. Applichiamo il principio dei minimi quadrati per stimare i parametri a_1 e b_1 di $d(p)$ e a_2 e b_2 di $o(p)$: si ottiene un semplice sistema che risolto porta nel nostro caso a: $d(p)=149.882{,}65-6{,}825\cdot p$; $o(p)=2.159.18+2{,}977\cdot p$. Il prezzo di equilibrio lo si trova ponendo: $d(p)=o(p)$; cioè $149.882{,}65-6{,}825\,p=2.159{,}18+2{,}977\,p$; risolvendo si ottiene: $p=15.070{,}74$ *Lit.* La quantità di equilibrio di mercato è: $d(p=15.070{,}74)=o(p=15.070{,}74)=47.024{,}79$ *Kg.*
La figura 1 rappresenta le due funzioni di p (p in ascissa) e il punto di equilibrio di mercato – loro intersezione.

Il mercato si presenta come un sistema dinamico in cui per le caratteristiche proprie delle relazioni tra domanda, offerta e prezzo – qualora il sistema fosse perturbato – si innescherebbe un processo iterativo le cui conseguenze finali dipenderebbero solo dalle proprietà dinamiche del punto di equilibrio (o attrattore, o repulsore). Calcoliamo l'elasticità puntuale della domanda ε_d e dell'offerta ε_o. Il confronto tra queste due elasticità ci permetterà di sapere se fatti improvvisi con effetti significativi sul mercato possano mutare definitivamente l'equilibrio trovato oppure no. Se $|\varepsilon_d|>|\varepsilon_o|$ si può affermare che il processo dinamico è stabile e perciò si arriverà dopo un po' all'equilibrio preesistente alla turbativa, altrimenti no. L'elasticità puntuale di una funzione, nel discreto, è definita come

$$\varepsilon_f=\left[\Delta f(p)/f(p)\right]/\left[\Delta p/p\right]=\frac{\Delta f(p)}{\Delta p}\cdot\frac{p}{f(p)}.$$

Nel nostro caso le elasticità puntuali della domanda e dell'offerta nel punto di equilibrio sono rispettivamente:

$$\varepsilon_d=b_1\cdot\frac{p}{d(p)}\cong-6{,}825\cdot\frac{p}{d(p)}$$

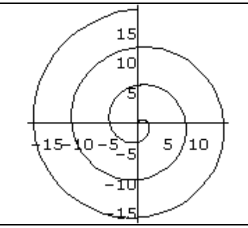
$$\varepsilon_o=b_2\cdot\frac{p}{o(p)}\cong 2{,}9768\cdot\frac{p}{o(p)}$$

Poiché $|\varepsilon_d|>|\varepsilon_o|$ concludiamo che il sistema per perturbazioni ragionevoli, è capace di raggiungere l'equilibrio in un numero finito di passi.

Bibliografia: [B.1] Giovanni De Maria, Trattato di logica economica, CEDAM, Padova, 1962; [B.2] Mario Faliva, Econometria principi e metodi, UTET, Torino, 1987.

La spirale di Archimede

La bella figura viene tracciata dall'equazione in coordinate polari $\rho=\alpha\cdot\theta$, dove ρ è la distanza del punto dal centro, θ è l'angolo descritto dal raggio vettore e α è un opportuno coefficiente caratteristico della spirale.



Al cinema, il posto davanti libero

di Arnaldo Vicentini

La sala di un cinema è dotata di *10* file di *10* posti l'una. Con *52* spettatori, qual è la probabilità P che uno di essi abbia il posto davanti a sé vuoto? Generalizziamo il quesito: la sala di un cinema è dotata di f file e di p posti l'una. Con s spettatori, $[1\le s\le p\cdot f]$, qual è la probabilità P che uno di essi abbia il posto davanti a sé vuoto?
Risoluzione: Supposto equiprobabile che uno spettatore occupi questo o quel posto ancora vuoto, se uno degli s spettatori occupa un certo posto, $p\cdot f-s$ posti (dei restanti $p\cdot f-1$) sono vuoti; ma solo i posti di $f-1$ file ne hanno uno davanti. Dunque:
$P=[(f-1)/f]\cdot[(p\cdot f-s)/(p\cdot f-1)]$. (1)
Per $f=10$, $p=10$, $s=52$ otteniamo:
$P=[(10-1)/(10)]\cdot[(10\cdot 10-52)/(10\cdot 10-1)]=24/55$.

È facile collaudare la bontà della formula (1) per piccoli valori di f, p ed s con un programma che faccia quanto segue: azzerati i contatori p_O (posti occupati) e c_{OL} (coppie di posti dietro occupato|davanti libero), si contino gli interi n da 1 a 2^{pf} scrivendoli in base 2 con $p\cdot f$ cifre. Ogni volta (delle $p\cdot f$ sopra s volte) che s delle $p\cdot f$ cifre binarie di n valgono 1 e le altre 0 si incrementi p_O di s e c_{OL} del numero Δ di occorrenze: $1\le r\le p\cdot(f-1)$; r-esima cifra$=1\wedge(r+p)$-esima cifra$=0$. Quando $n=2^{pf}$, c_{OL}/p_O è la probabilità cercata. (Chi desidera avere il programma in TurboPascal, lo chieda alla redazione.)

I grafici pubblicati su questi fogli,
anche quelli della testata,
sono stati realizzati con il programma
MATHEMATICA
della Wolfram Research.

Numeri cardinali e ipotesi del continuo

di Carlo Veronesi

Supponiamo di trovarci in una sala per conferenze e di notare che non vi sono persone in piedi, né posti vuoti. Se ognuno dei presenti occupa un posto e uno solo, possiamo concludere che il numero di persone è uguale a quello delle sedie, anche senza contare separatamente le persone e le sedie. Risulta dunque abbastanza naturale, nella vita di tutti i giorni, collegare il concetto di numero a quello di corrispondenza biunivoca. Questa è anche la via percorsa da Cantor nell'elaborazione della sua teoria dei numeri cardinali. Seguendo Cantor, diremo che due insiemi A e B sono equipotenti se si possono porre in corrispondenza biunivoca. È immediato verificare che l'equipotenza è una relazione di equivalenza. Perciò, dato un insieme A, si può considerare la classe degli insiemi ad esso equipotenti, che si definisce numero cardinale di A.

Ogni insieme finito può essere riferito biunivocamente a un insieme del tipo *{1, 2, 3, …, n}* e dunque il suo numero cardinale può essere rappresentato con un numero naturale *n* (ultimo elemento dell'insieme). Invece la cardinalità dell'insieme **N** di tutti i numeri naturali non può essere rappresentata da un numero *n* ed è stata indicata da Cantor con il simbolo $\aleph_0$ (Alef-zero, con Alef prima lettera dell'alfabeto ebraico). La stessa cardinalità (o potenza del Numerabile) compete anche all'insieme **P** dei numeri pari. Infatti l'applicazione f: $n \to 2n$ è una bîezione fra **N** e **P**. Cantor ha mostrato che anche l'insieme $\mathbf{Q}_a$ dei numeri razionali assoluti, apparentemente "più vasto" di **N**, ha ancora la stessa cardinalità del numerabile. Infatti ogni elemento di $\mathbf{Q}_a$ è una frazione a/b di cui può essere definita *l'altezza* a+b. Siccome le frazioni di una certa altezza sono in numero finito, l'insieme di tutte le frazioni può essere ordinato in successione secondo valori crescenti della altezza: 0/1; 0/2, 1/1; 0/3, 1/2, 2/1; 0/4, 1/3, 2/2, 3/1, …quindi $\mathbf{Q}_a$ può essere riferito biunivocamente a **N**. Anche l'insieme **Q** dei razionali relativi ha la cardinalità di **N**. Cantor ha tuttavia mostrato che $\aleph_0$ non è il più grande dei numeri transfiniti. Infatti, dato un insieme A (finito o infinito) di cardinalità α, l'insieme delle parti di A ha una cardinalità $2^\alpha > \alpha$ (teorema di Cantor). In particolare risulta $2^{\aleph_0} > \aleph_0$.

Cantor fu anche in grado di dimostrare che $2^{\aleph_0}$ è la cardinalità (o potenza) dell'insieme **R** dei numeri reali. Dunque la cardinalità di **R** (che si definisce potenza del Continuo) è maggiore di quella di **N**. L'ipotesi del continuo di Cantor è la congettura secondo cui fra la cardinalità dell'insieme **N** dei numeri naturali e la cardinalità dell'insieme **R** dei numeri reali non sono compresi altri numeri cardinali. In altri termini $2^{\aleph_0}$ è l'immediato successore di $\aleph_0$, cioè il secondo numero cardinale. In formule

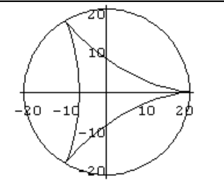
$$2^{\aleph_0} = \aleph_1 .$$

Nella teoria assiomatica degli insiemi di Zermelo-Fraenkel, l'ipotesi del continuo risulta indecidibile sulla base degli assiomi: Gödel ha mostrato (1940) che non può essere refutata, P. Cohen (1963) che non può nemmeno essere dimostrata. Accanto a questa relazione è possibile anche pensare che valga una *ipotesi del Continuo generalizzata*. Il teorema di Cantor infatti assicura che, dato un numero cardinale, anche transfinito, si può sempre passare a un numero maggiore. Secondo l'ipotesi generalizzata si suppone che, per ogni *n*, risulti $2^{\aleph_n} = \aleph_{n+1}$ cioè che con successivi passaggi all'insieme delle parti si esaurisca la successione di tutti i numeri cardinali transfiniti, senza saltare nessuna cardinalità. È appena il caso di osservare che questa congettura non ha un corrispettivo nel caso finito. Infatti per gli insiemi finiti i passaggi all'insieme delle parti non permettono di ottenere insiemi di tutte le cardinalità.

Bibliografia: 1) R. L. Wilder, *Introduction to foundations of Mathematics*, John Wiley & Son, New York, 1965; 2) P. R. Halmos, *Teoria elementare degli insiemi*, Feltrinelli, Milano, 1970; 3) M. Kline, *Matematica: la perdita della certezza*, Mondadori, Milano, 1985.

Deltoide

È un caso particolare di ipocicloide. Le sue coordinate parametriche sono:
x=14·cos t + 7·cos 2·t
y=14·sen t - 7 sen 2·t
t={0 ; 2·π}



Proprietà del numero *i*

di Luigi Marigo

Luciano Corso, sul foglio n. 6 scrive che nel piano complesso tutto gira e viene il mal di testa. Responsabile della drammatica situazione è il numero *i* con le sue proprietà: $i^0=1$, $i^1=i$, $i^2=-1$, $i^3=-i$, $i^4=1$, $i^5=i$, … e, in genere, $i^n=i^{(4q+r)}=i^{4q}\ i^r=(i^4)^q\ i^r=i^r$ (con *q* e *r* quozienti e resto della divisione per *4*). Sia ora *z* un numero complesso unimodulare $z=\cos\vartheta+i\cdot sen\vartheta$. Derivandolo *n* volte rispetto a ϑ, si ha: $D^{(n)}z=D^{(n)}\cos\vartheta+i\cdot D^{(n)}sen\vartheta= \cos(\vartheta+n\cdot\pi/2)+i\cdot sen(\vartheta+n\cdot\pi/2)$ e, per la relazione di De Moivre $D^{(n)}z=[\cos\vartheta+i\cdot sen\ z]\cdot[\cos n\cdot\pi/2 + i\cdot sen\ n\cdot\pi/2]=z\cdot[\cos \pi/2+i\ sen\ \pi/2]^n=i^n\cdot z$. Le relazioni $D^{(n)}\cos\vartheta=\cos(\vartheta+n\cdot\pi/2)$ e $D^{(n)}sen\ \vartheta= sen(\vartheta+n\cdot\pi/2)$ significano che ad ogni derivazione l'argomento aumenta di $\pi/2$ per cui il punto immagine di *z* ruota nel piano complesso di $\pi/2$. Ma derivare *n* volte equivale a moltiplicare per i^n, per cui ogni moltiplicazione per *i* fa ruotare il punto immagine di $\pi/2$, da cui il mal di testa. Concludo osservando che è la relazione $D^{(n)}z=i^n\cdot z$ che autorizza l'uguaglianza $z=r\cdot e^{i\vartheta}$.

Diventare soci, conviene

Invia un assegno o un vaglia postale di 50.000 lire intestato a Mathesis VR c/o Luciano Corso – Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona, specificando bene nome, cognome e indirizzo con cap e ragione del versamento. Oltre a sostenere l'associazione, potrai seguire tutti i corsi di aggiornamento per docenti, tutte le manifestazioni culturali che l'associazione farà. Sarai informato sulle novità, riceverai il Periodico di Matematiche – prestigiosa rivista scientifica e culturale nazionale – e questo foglio di Verona (mensile). Puoi fare il versamento anche sul conto corrente bancario della sezione intestato a: Corso Luciano c/o Mathesis Verona – coordinate bancarie: K – 05188 – 11715 – 5547.

Cari amici, preziosissimi soci

Siamo arrivati ormai alla fine dell'anno e abbiamo rispettato gli impegni presi nell'assemblea annuale dei soci del 1998: siamo stati capaci di fare 12 numeri del presente foglio (uno al mese) e di inviarli a scadenze precise a tutti i soci. Abbiamo anche mandato il foglio ad amici di altre città e ad alcuni docenti universitari. Abbiamo avuto riscontri positivi per la vivacità e l'originalità dell'iniziativa. Ora è tempo di crescere e di migliorarsi. Per far ciò abbiamo bisogno di due cose: 1) avere i finanziamenti necessari per poter continuare l'iniziativa; 2) registrare la testata e renderla ufficiale e pubblica con un nome e una finalità. Sui finanziamenti contiamo molto sulla sensibilità dei soci e di chi vuole ancora ricevere la rivista. Chiederemo in particolare, a chi non è socio Mathesis di Verona e a partire dal prossimo anno un contributo a copertura delle spese vive di realizzazione e spedizione del foglio. 12.000 lire all'anno per 12 numeri. La registrazione della testata verrà fatta in tribunale: le assegneremo un nome e un direttore responsabile. Alcuni soci storici che non hanno rinnovato l'iscrizione finora hanno continuato a ricevere il foglio: non contino più su questo atto di liberalità. Le risorse, i fondi sono indispensabili per la vitalità di una associazione e non possiamo fare deroghe. Invitiamo tutti a sostenere l'iniziativa per il bene della Mathesis di Verona.