# MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore: Luciano Corso - Redazione: Luciano Corso, Elisabetta Capotosto, Arnaldo Vicentini - Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – 338 6416432
e-mail: lcorso@iol.it – Stampa in proprio - Numero 110 – dicembre 2006

## SIMMETRIA SPECULARE E DUALITÀ

di Paolo Di Sia (*)

[*Segue dal numero 109*] Consideriamo per ulteriore comprensione qualche esempio; segue uno schema generale con tutte le dualità che interconnettono le teorie.
1) La teoria **tipo I** è duale con la teoria **eterotica O**. Risulta infatti che la fisica della prima per valori grandi ( >1) della sua costante di accoppiamento è **identica** alla fisica della seconda per valori piccoli ( < 1) della rispettiva costante. Vale anche il contrario

(*grande* ⇆ *piccolo*).

Ciascuna delle due si trasforma nell'altra quando si varia il valore delle loro costanti di accoppiamento.

Se si indica con $\mathbf{g_{HO}}$ la costante di accoppiamento della teoria **eterotica O** e $\mathbf{g_{I}}$ quella **tipo I**, le due teorie risultano identiche se $\mathbf{g_I} = 1 / \mathbf{g_{HO}}$ ; ciò implica che se una costante è < 1, l'altra sarà > 1;
2) la teoria **tipo IIB** è **autoduale**; cambiando la costante di accoppiamento con il suo **inverso** si ottiene una teoria identica. I valori $\mathbf{g_{IIB}}$ e $1 / \mathbf{g_{IIB}}$ descrivono infatti la stessa fisica.
Si parla di **dualità di accoppiamento forte-debole** quando la fisica di una teoria fortemente accoppiata è descritta dalla fisica di un'altra teoria debolmente accoppiata. Le due teorie non sono in realtà distinte, pur fornendo due descrizioni non equivalenti di una stessa teoria più fondamentale.
Le cinque teorie di stringa, assieme alla **teoria M** (la **teoria "madre"**), sono perciò **duali l'una all'altra**, interconnesse da un unico schema teorico; sono cinque diversi modi di descrivere la stessa fisica. Si può affermare che **dualità** e **teoria M** uniscono tra loro le cinque teorie di stringa.
Nello schema riassuntivo che segue, le frecce indicano le teorie duali l'una all'altra. Considerando anche le dualità che riguardano la geometria dello spaziotempo (vedasi anche MatematicaMente n. 76), le cinque teorie e la **M** sono collegate da una rete di dualità:

**M – Teoria** ↱ **Tipo II B** ↺
**Tipo I** ↔ **Eterotica O** ↰ ↑ ↓
↳ **Eterotica E** ↑ ↓ **Tipo II A** ↲

Come affermato in precedenza, il processo teorico di continua comprensione delle teorie di stringa ha mostrato che le cinque teorie fanno parte di un unico sistema onnicomprensivo, denominato **teoria M**. "Graficamente" si può visualizzare una struttura di tipo pentagonale, con la teoria M al centro:

*Tipo IIB*
*Tipo I* *Tipo IIA*
*Teoria M*
*Eterotica O* *Eterotica E*

**Le teorie di supergravità** (chiamate anche **teorie "sugra"**) sono teorie quantistiche di campo supersimmetriche che incorporano la relatività generale. I tentativi di conciliare relatività generale e meccanica quantistica si rivelarono però fallimentari e tra tutte queste teorie le più vicine all'obiettivo erano quelle in dieci o undici dimensioni. Nell'ipotesi infatti in cui tutte le dimensioni, tranne le quattro ordinarie, siano "arrotolate", si è dimostrato che una tale teoria in più di undici dimensioni origina una particella di massa nulla, con spin maggiore di 2. Tale possibilità è da escludere per ragioni sia teoriche che sperimentali. Nei processi cosiddetti "a bassa energia", dove cioè non si rileva il carattere "esteso" della stringa, è possibile approssimare una stringa con una particella puntiforme priva di struttura interna, utilizzando lo schema consueto delle teorie quantistiche di campo. La teoria di supergravità è quindi la teoria quantistica di campo che meglio approssima la teoria delle stringhe.

Considerando perciò anche tale teoria, lo schema unificato precedente diviene una struttura di tipo esagonale, sempre con la teoria M al centro:

*Tipo IIB* *Tipo IIA*
*Sugra*
*Tipo I* *Teoria M*
$D = 11$
*Eterotica O* *Eterotica E*

(*) disia@sci.univr.it

## Varianza di medie aritmetiche campionarie, di campioni finiti estratti in blocco da popolazioni finite

di Alberto Guerrini e Luciano Corso

Consideriamo una popolazione $X$ costituita da $N$ unità statistiche, che, relativamente al carattere oggetto di studio, assumono, senza perdere di generalità, i valori distinti $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_N$.. Siano $\mu$ e $\sigma^2$ rispettivamente media aritmetica e varianza di $X$. Estraiamo, senza reinserimento, da essa un campione di $n$ elementi $x_1, x_2, \dots, x_n$.. Quanti campioni distinti possiamo ottenere? Nel caso in cui il campionamento sia esaustivo, ossia gli elementi del campione siano estratti uno alla volta senza reinserimento, l'ordine degli elementi è determinante e il numero dei possibili campioni è $(N)_n$ , cioè tanti quante sono le iniezioni da un $n$-insieme a un $N$-insieme; se, estratti in un'unica soluzione, l'ordine non conta e quindi i campioni differiscono tra di loro per almeno un elemento. I campioni, in tal caso, sono le $n$-parti di un $N$-insieme e sono in numero di

$$\binom{N}{n}. \qquad (1)$$

Sia

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

la media aritmetica campionaria del campione estratto. Al variare dell' $n$-pla campionaria,

la quantità $\bar{x}$ descrive la variabile casuale $\overline{X}$ ,

detta variabile casuale media aritmetica campionaria. Vogliamo ora determinare la varianza di tale variabile casuale. Con semplici considerazioni di tipo combinatorio si evince che la distribuzione della media aritmetica campionaria

$\overline{X}$

è la medesima con entrambi i tipi di campionamento senza reinserimento (esaustivo o in blocco) e quindi anche la varianza della media campionaria sarà uguale. Procediamo considerando il caso di campionamento esaustivo (campioni ordinati). Sia $X_i$ ($i$=1, 2, …, $n$) l'$i$-esima marginale del campione, ossia la variabile casuale descritta dall'$i$-esimo elemento campionato. Come è noto dalla teoria elementare dei campioni, tutte le marginali si distribuiscono come la popolazione $X$ da cui sono stati estratti i campioni: pertanto la marginale $X_i$ ($i$=1, 2, …, $n$) è una variabile casuale che assume i valori $\eta_1$, $\eta_2$, …, $\eta_N$ con probabilità costante $1/N$ e quindi con media $\mu$ e varianza $\sigma^2$. Vogliamo ora dimostrare la relazione, meno nota, che permette di esprimere la covarianza tra una qualsiasi coppia di marginali $X_i$ e $X_j$ del campione in funzione della varianza $\sigma^2$ della popolazione. Si parte dalla nota proprietà della media aritmetica in virtù della quale la somma degli scarti dalla media vale 0:

$$\sum_{k=1}^{N}(\eta_k-\mu)=0 \tag{2}$$

Si eleva al quadrato la relazione (2)

$$\left[\sum_{k=1}^{N}(\eta_k-\mu)\right]^2=0 \tag{3}$$

e si sviluppa il quadrato del polinomio al primo membro della (3):

$$\sum_{k=1}^{N}(\eta_k-\mu)^2+\sum_{h=1}^{N}\sum_{\substack{k=1\\ h\neq k}}^{N}(\eta_h-\mu)\cdot(\eta_k-\mu)=0 \quad , \tag{4}$$

dove nella doppia sommatoria deve essere $k \neq j$.
Dividendo la (4) per $N\cdot(N-1)$ otteniamo:

$$\frac{\sum_{h=1}^{N}\sum_{k=1,\,h\neq k}^{N}(\eta_h-\mu)\cdot(\eta_k-\mu)}{N\cdot(N-1)}=-\frac{\sum_{k=1}^{N}(\eta_k-\mu)^2}{N\cdot(N-1)},$$

cioè:

$$Cov(X_i,X_j)=-\frac{\sum_{k=1}^{N}(\eta_k-\mu)^2}{N\cdot(N-1)}=-\frac{\sigma^2}{N-1} \quad . \tag{5}$$

La covarianza negativa è spiegabile in quanto tanto più grandi sono i valori assunti dalla marginale $X_i$, tanto più piccoli, in media, sono i valori assunti dalla marginale $X_j$ e viceversa. Consideriamo ora la varianza della variabile casuale media aritmetica campionaria:

$$V(\bar{X})=V\left(\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}X_k\right)=$$
$$=\frac{1}{n^2}\cdot\left[\sum_{k=1}^{n}V(X_k)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1,\,i\neq j}^{n}Cov(X_i,X_j)\right],$$

per la (5) si ottiene:

$$V(\bar{X})=\frac{1}{n^2}\cdot\left[n\cdot\sigma^2+n\cdot(n-1)\cdot\left(-\frac{\sigma^2}{N-1}\right)\right]. \tag{6}$$

Dopo una semplice semplificazione si ottiene l'importante risultato:

$$V(\bar{X})=\frac{\sigma^2}{n}\cdot\frac{(N-n)}{(N-1)}. \tag{7}$$

Così abbiamo trovato la relazione esistente tra la varianza della variabile aleatoria media aritmetica campionaria e la varianza della popolazione, quando siamo in presenza di campioni estratti in blocco da una popolazione di numerosità finita.
Si noti che quando si estrae da una popolazione infinita si ha:

$$(N\to\infty)\Rightarrow\left[\frac{\sigma^2}{n}\cdot\frac{(N-n)}{(N-1)}\to\frac{\sigma^2}{n}\right]. \tag{9}$$

Il che significa che quando la popolazione ha cardinalità infinita, estrarre con o senza reinserimento è indifferente dal punto di vista della varianza.

**Bibliografia**: [B.1] Basilio Giardina (1978), *Manuale di statistica per aziende e ricercatori*, Franco Angeli editore, Milano; [B.2] Aldo Zanella (1974), Elementi di teoria del campionamento da popolazioni finite, CLEUP, Padova

# Lo schema di Leontief in economia

di Luciano Corso

L'economia ha sviluppato a partire dagli anni venti del secolo scorso una sofisticata interpretazione dei fenomeni inerenti il mercato. L'uso del calcolo delle matrici ha permesso di esprimere i processi produttivi e di consumo in modo sintetico e facilmente trattabile con le usuali tecniche della matematica. W. Wassily Leontief ha proposto uno schema di rappresentazione del sistema produttivo di una società basato proprio sulle matrici. Se vogliamo trovare un'origine concettuale del lavoro di Leontief occorre andare a cercare tra le pubblicazioni del fisiocrate François Quesnay (1694-1774). In particolare, è nel *Tableau économique* di questo autore che troviamo la nascita dell'idea di una rappresentazione globale, ancorché elementare, di un sistema economico, mediante una tabella a doppia entrata. Lo schema di Leontief, noto in economia come tabella delle interdipendenze settoriali di un sistema economico, si basa essenzialmente sulle seguenti ipotesi:

1) la produzione di beni e servizi di una data società sia di tipo lineare.
2) il sistema produzione-consumi sia chiuso; cioè tutte le quantità prodotte siano consumate o rientrino a loro volta come beni da utilizzare per la produzione;
3) il sistema sia stazionario.

Queste tre ipotesi propongono un sistema economico in cui i mezzi di produzione sono completamente utilizzati e un sistema di consumi che non lascia in riserva alcun bene economico prodotto. Un sistema economico di questo tipo può essere completamente espresso dai seguenti sistemi di equazioni lineari:

$$\begin{bmatrix}(a_{11}-1) & a_{12} & a_{13} & . & . & . & a_{1n}\\ a_{21} & (a_{22}-1) & a_{23} & . & . & . & a_{2n}\\ . & . & . & . & . & . & .\\ . & . & . & . & . & . & .\\ . & . & . & . & . & . & .\\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & . & . & . & (a_{nn}-1)\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}Q_1\\ Q_2\\ .\\ .\\ .\\ Q_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ .\\ .\\ .\\ 0\end{bmatrix} \tag{1}$$

$$\begin{bmatrix}(a_{11}-1) & a_{21} & a_{31} & . & . & . & a_{n1}\\ a_{12} & (a_{22}-1) & a_{32} & . & . & . & a_{n2}\\ . & . & . & . & . & . & .\\ . & . & . & . & . & . & .\\ . & . & . & . & . & . & .\\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & . & . & . & (a_{nn}-1)\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}p_1\\ p_2\\ .\\ .\\ .\\ p_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ .\\ .\\ .\\ 0\end{bmatrix} \tag{2}$$

dove $a_{kj}$ (con $k,j$ = 1, 2, …, $n$) sono i coefficienti di produzione intesi come efficienza a produrre il bene $k$ con il processo j, $Q_k$ sono le quantità fisiche totali prodotte per ogni bene $k$ e $p_k$ sono i prezzi dei prodotti $k$ ( con $k$=1, 2, …, $n$). Una condizione naturale da rispettare è che $a_{kj} \geq 0$, non avendo alcun significato economico altrimenti. Se in questo schema prendiamo la colonna $n$-esima e la riga $n$-esima troviamo un'industria che che richiede in entrata una serie di consumi e che eroga in uscita una serie di servizi. Nel proporre questa rappresentazione del sistema produttivo Leontief non ha volutamente distinto i diversi livelli di remunerazione dei fattori produttivi (salari, stipendi, rendite, profitti, tasse). (1) e (2) sono due sistemi lineari omogenei. Si noti che la matrice di trasformazione in (2) è la trasposta di quella in (1). Perché i sistemi (1) e (2) ammettano soluzione occorre che i determinanti della matrice di trasformazione (1) e (2) siano uguali a zero. Il che significa che perché il sistema ammetta soluzioni occorre che almeno una colonna della matrice dei coefficienti sia linearmente dipendente dalle altre.

**Bibliografia**: Luigi Pasinetti (1975), Lezioni di teoria della produzione, il Mulino, Bologna