MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore: Luciano Corso - Redazione: Luciano Corso, Elisabetta Capotosto, Arnaldo Vicentini - Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – 338 6416432
e-mail: lcorso@iol.it – Stampa in proprio - Numero 111 – gennaio 2007

Funzioni e curve quasi-algebriche: loro proprietà

di Antonio Salmeri [*]

Premessa

Lo studio delle funzioni *quasi-algebriche* nasce a margine di una mia ricerca molto più ampia fatta molti anni fa. Alcuni risultati sono stati pubblicati nel 1963 nel "Giornale di Matematica del Battaglini" edito da Pellerano Del Gaudio di Napoli. Questa pubblicazione, pur in lingua italiana, destò molto interesse fra i Matematici e fra questi il Prof. Edward S. Allen della Iowa State University ha approfondito i miei studi ed il 15 Aprile 1966 ne fece un breve rapporto in una seduta della Mathematical Association of America inviandomi i risultati da lui ottenuti.
Nel caso si desideri consultare il lavoro pubblicato nel Giornale di Matematica e gli studi successivi fatti dal Prof. Allen, si possono chiedere i files elettronici a *a.salmeri@mclink.it* .

Funzioni quasi-algebriche

Si definiscono quasi-algebriche le funzioni della forma $y = f(x, [x])$ dove $[x]$ è la parte intera di x.
Una funzione quasi-algebrica conosciuta è $y = [x]$ in quanto utilizzata per mostrare una curva discontinua, vedasi fig. 1 (Aldo Ghizzetti – Lezioni di Analisi Matematica - Veschi , 1957).

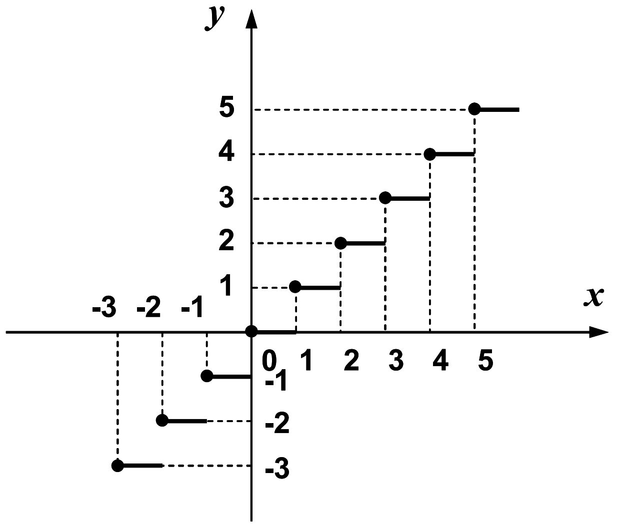

Fig. 1

Una generica funzione quasi-algebrica, come ad esempio:
$y = x^3\,[x] - 3x\cdot[x]^2$
è una funzione discontinua in tutti i punti aventi per ascissa un numero intero.
Si riporta in fig. 2 il grafico della funzione $y = x\,[x]$.
Fra le possibili funzioni quasi-algebriche, prendiamo in esame la funzione potenziale che andiamo a definire.
Si indica con il simbolo $\{m^n\}$, con m ed n numeri interi, che leggeremo "m di potenza n", la somma delle potenze n-esime dei primi m termini della serie naturale:

$$\sum_{k=1}^{m} k^n = \{ m^n \}$$

Si definisce $\{m^n\}$ anche per un numero reale positivo m,p di caratteristica m e di mantissa p:
$\{m, p^n\} = 0, p^n + 1, p^n + 2, p^n + \ldots + m, p^n$

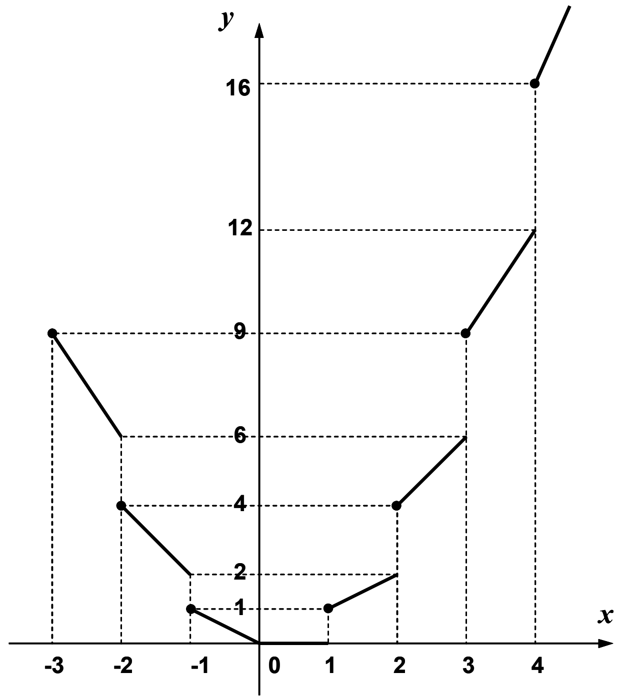

Fig. 2

Posto $m,p = x$, si ha:

$$\{x^n\} = (x-m)^n + \ldots + (x-2)^n + (x-1)^n + x^n =$$
$$= x^n + \sum_{k=1}^{m} (x-k)^n$$

poiché è

$$(x-k)^n = \sum_{t=0}^{n} (-1)^t \cdot \binom{n}{t} \cdot x^{n-t} \cdot k^t$$

si ha successivamente:

$$\{x^n\} = x^n + \sum_{t=0}^{n} (-1)^t \cdot \binom{n}{t} \cdot \{[x]^t\} \cdot x^{n-t} \qquad (1)$$

Si dimostra che la funzione (1) è continua anche nei punti di ascissa intera, ciò si può verificare calcolando le stesse nei punti di ascissa $x_0 - \varepsilon$ e $x_0 + \varepsilon$, dove ε é un numero piccolo a piacere e x_0 é un numero intero qualsivoglia, si dimostra inoltre che le tangenti nei suddetti punti tendono a coincidere con il tendere di ε a zero.
Il valore della derivata della funzione (1) vale $\{x^n\}' = n\,\{x^{n-1}\}$ che richiama molto da vicino la derivata di $y = x^n$.

Riportiamo qui di seguito le funzioni potenziali dei gradi 1, 2 e 3:

$$\{x\} = (z+1)x - z(z+1)/2, \qquad (1')$$
$$\{x^2\} = (z+1)x^2 - z(z+1)x + z(z+1)(2z+1)/6 \qquad (1'')$$
$$\{x^3\} = (z+1)x^3 - 3z(z+1)x^2/2 + z(z+1)(2z+1)x/2 - z^2(z+1)^2/4 \qquad (1''')$$

nelle quali per semplicità di scrittura abbiamo posto $[x] = z$.

Funzione associata

Chiamiamo funzione associata di una quasi-algebrica, la funzione algebrica ottenuta sostituendo x a $[x]$, ovvero a z. Le associate delle funzioni quasi-algebriche (1'), (1'') e (1'''), con la suddetta sostituzione, sono le seguenti:

$$*\{x\} = x\,(x+1)\,/2 \qquad (2')$$
$$*\{x^2\} = x\,(x+1)\,(2x+1)\,/6 \qquad (2'')$$
$$*\{x^3\} = x^2\,(x+1)^2\,/4 \qquad (2''')$$

che riconosciamo essere le relazioni che esprimono la somma delle potenze n-esime dei primi numeri della serie naturale. Si verifica che le funzioni associate alle funzioni potenziali, nell'intervallo di definizione (semiasse positivo delle x) non hanno né massimi e minimi, né flessi. Si dimostra anche che le funzioni potenziali (quasi-algebriche) nell'intervallo di definizione (semiasse positivo delle x) non hanno né massimi e minimi, né flessi.

Desideriamo osservare il comportamento reciproco fra una curva potenziale e la propria associata. Si osserva che le curve quasi-algebriche di ordine dispari intersecano in infiniti punti le proprie associate nei punti di ascissa x_0 e nei punti di ascissa $x_0 + ½$ pur non avendo entrambe infiniti flessi o infiniti massimi e minimi.

Le curve quasi-algebriche di ordine pari sono invece tangenti infinite volte nei punti di ascissa x_0 alle proprie associate pur non avendo entrambe infiniti flessi o infiniti massimi e minimi.

Conclusioni

Lo studio di queste funzioni ha permesso di scoprire che esistono coppie di curve che si intersecano infinite volte pur essendo entrambe prive di infiniti flessi. L'esistenza di queste coppie di curve dimostra ancora una volta che l'intuizione – che negherebbe tale possibilità – può essere a volte ingannevole. Ne è un esempio la funzione continua ma non derivabile scoperta da Weierstrass e che urtò in modo particolare la scuola intuitiva degli analisti.

[*] Socio Mathesis Sezione di Roma

Relazione tra una grandezza e le sue approssimazioni razionali: un secondo problema

di Ruggero Ferro

[*Segue dal n.* 108] Ci eravamo posti l'interrogativo se ciascuna sezione di Dedekind determina una grandezza (l'avevamo chiamato problema B). Ora vogliamo affrontare questo problema. Sappiamo che i numeri razionali sono tanti quanti i numeri naturali, ed anche che i problemi esprimibili in un linguaggio numerabile (che può dunque contenere anche un nome per ciascun numero razionale) sono in numero numerabile, sicché le grandezze di cui si può avere bisogno di parlare sono in numero numerabile. D'altra parte si può dimostrare (lo fece Cantor per primo) che le sezioni di Dedekind sono una quantità più che numerabile (strettamente maggiore di una quantità equinumerosa all'insieme dei numeri naturali). Tuttavia, anche se una sezione di Dedekind non deriva dall'approssimare razionalmente per difetto o per eccesso di una delle grandezze che possono essere descritte e considerate e di cui si conosce l'esistenza, è opportuno pensare che per ciascuna sezione di Dedekind ci sia una grandezza maggiore od uguale di tutte le grandezze multiple dell'unità di misura secondo i numeri razionali della prima classe della sezione di Dedekind e minore od uguale di tutte le grandezze multiple dell'unità di misura secondo i numeri razionali della seconda classe della sezione di Dedekind. Ciò per due motivi. Da una parte non si capisce perché certe sezione di Dedekind debbano determinare una grandezza ed altre no, anche se le prime sono costruite per approssimare una grandezza che già sappiamo che c'è.

D'altra parte, e forse questa osservazione è più rilevante, una sezione di Dedekind che non determina una grandezza indicherebbe una lacuna, una interruzione, un salto nel continuo delle possibilità che abbiamo supposto fin dall'inizio come ambiente in cui cogliere le grandezze. Così è appunto l'esigenza di rispettare la continuità che ci spinge ad eliminare ogni possibile interruzione e accettare la scelta che ogni sezione di Dedekind determini una grandezza, scegliendo in tal modo una situazione che dà una risposta positiva al problema B. Si noti anche una conseguenza, considerata marginalmente, di questa scelta e forse non tanto auspicabile: una volta associato uno ed un solo ente a ciascuna sezione di Dedekind, si dimostra che le sezioni di Dedekind sono tante quanti i sottoinsiemi dei naturali, cioè una quantità più che numerabile, una quantità che eccede di gran lunga le esigenze di risolvere problemi, con complicazioni e limiti non banali alla conoscibilità nella teoria che viene sviluppata (ad esempio non ogni elemento potrà avere un nome).

La scelta che ogni sezione di Dedekind individui una ed una sola grandezza va sotto il nome di completezza di questo sistema. [*Segue al n.* 112]

Evoluzionismo o creazionismo?

di Giuliana Breoni

La comunità scientifica si è data delle regole per valutare l'attendibilità delle affermazioni dei ricercatori. Come è noto, ogni enunciato è scientificamente rilevante se deriva da due processi: quello ipotetico deduttivo e quello sperimentale. Con il primo criterio si garantisce il rigore logico delle affermazioni scientifiche. Partendo da principi accettati dalla comunità scientifica mondiale in quanto ragionevoli e – ancor piú importante – oggettivamente sperimentabili secondo canoni e protocolli ben definiti, il primo metodo porta a conclusioni certe e coerenti rispetto agli enunciati da cui si è partiti. Il criterio sperimentale, invece, costituisce il fondamento dell'attendibilità delle affermazioni che un ricercatore fa circa lo stato di una esperienza. Eventuali punti deboli di una teoria non costituiscono per la comunità scientifica una ragione sufficiente per rifiutare la teoria stessa, al contrario le lacune sono motivo di approfondimento e di sistemazione.

La comunità scientifica non accetta, inoltre, che sulla debolezza di una tesi scientifica se ne inneschi un'altra che, sfruttando la situazione, porti a sostenere la validità della nuova senza alcun dato sperimentale alternativo a suo sostegno. Per questa ragione il Creazionismo non viene accettato dalla comunità scientifica come teoria scientifica, mentre l'evoluzionismo sí. Per citare padre Coyne, gesuita neodarwiniano, astrofisico, ex direttore della specula vaticana e consigliere scientifico di Papa Woytjla, nessuno può confondere fede e scienza. La scienza ha i suoi paradigmi che vanno rispettati. La fede nasce dalle ragioni del cuore. I creazionisti vogliono trasformare le ragioni del cuore in enunciati scientifici: sbagliano. Padre Coyne afferma che «la teoria neodarwiniana dell'evoluzione biologica è compatibile con il credo cristiano […] e che Dio ha creato il mondo in modo tale che esso partecipi in maniera dinamica e attiva alla Sua creazione, al Suo amore» [B.1] e come uomo di fede sottolinea che il cosmo e la vita sono in un grande travaglio. Qui amore e morte di ogni stato di natura pare caotico e in parte lo è; tuttavia si nota anche l'amore in questo universo, si nota un conflitto tra il bene e il male, tra il caos e la ragione, tra l'ordine e il disordine. Dio ha voluto che la creazione stessa con tutte le sue forme di esistenza, partecipasse in libertà a questo suo grande e misterioso progetto; e questa tesi è ragionevole.

[B.1] www.dsonline.it/aree/universita/documenti/dettaglio.asp?id_doc=29843