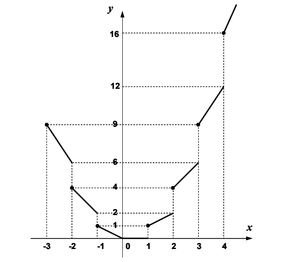
MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore: Luciano Corso - Redazione: Luciano Corso, Elisabetta Capotosto, Arnaldo Vicentini - Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – 338 6416432
e-mail: lcorso@iol.it – Stampa in proprio - Numero 112 – febbraio 2007



NUMERI REALI E CONTINUITÀ

di Ruggero Ferro [*]

[*Segue dal n.* 111] Se dunque la scelta della risposta al problema **B** deriva da una certa nozione, per quanto vaga, di continuità, questa stessa risposta coglie tutto della nozione ingenua di continuità?

Si diceva che la nostra idea di continuità viene dall'esperienza di considerare situazioni in cui non ci sono né buchi, né salti, né interruzioni. Ad esempio la superficie di un tavolo sano, non ha buchi, tanto è vero che se appoggio qualcosa anche di molto piccolo non c'è pericolo che passi attraverso il tavolo, anche se i raggi X passano comodamente da una parte all'altra del tavolo. Ancora un tessuto, pur essendo costituito da una rete di fili, è così fitto da non lasciare passare il vento e, in un certo senso, il calore. Una rete da pesca, pure avendo maglie più larghe di quelle di un tessuto, pur tuttavia è una barriera insuperabile per i pesci che vi rimangono impigliati, per essi è una barriera continua. Cosa voglio dire con questi esempi? La nozione di continuità è una nozione relativa: richiede che non ci siano buchi, interruzioni, che possano essere utilizzate da un agente di certe dimensioni.

Così se noi supponiamo che le grandezze siano come le abbiamo pensate, con una ed una sola grandezza determinata da ciascuna sezione di Dedekind, abbiamo ottenuto in sistema continuo? Detto altrimenti, la completezza implica la continuità? Meglio, quali agenti possono e quali non possono passare attraverso una tale barriera (passare attraverso una tale barriera ora significa che si possono immaginare enti compatibili con quelli che hanno il tipo di grandezza che si sta considerando, ma a cui non corrisponde nessuna delle grandezze in considerazione)?

Chiaramente il sistema dei numeri razionali ha delle lacune: la diagonale del quadrato di lato unitario esiste ma non esiste alcun numero razionale che permetta di misurarla contando rispetto all'unità di misura. Però questo tipo di lacune è stato eliminato considerando le sezioni di Dedekind. Ci sono altri enti che hanno grandezze che le sezioni di Dedekind non possono cogliere? Certamente si, e li abbiamo già incontrati: gli infinitesimi positivi. Tuttavia, come sappiamo, questi sono assolutamente piccoli, non rilevabili dividendo l'unità in un numero numerabile di parti. Di fatto qualsiasi grandezza determinabile con approssimazioni di commensurabili con l'unità di misura è già stata considerata, cosicché il sistema di tali grandezze non ne esclude alcuna che sia distinguibile da un'altra mediante grandezze commensurabili con l'unità di misura. Dunque si sta parlando di una continuità relativa a ciò che è distinguibile mediante, fondamentalmente, l'uso dei numeri naturali, quelli su cui si può basare una convinzione di conoscibilità, grazie alle finitezza di ciascuno di loro, ed è da sottolineare la centralità del sistema dei numeri naturali nell'intero sviluppo di quanto si è considerato.

Coloritamente si può affermare che si sono chiusi i buchi tra i razionali (tra le grandezze commensurabili con una unità di misura) inserendo grossi tappi: le classi di equivalenza di grandezze infinitamente vicine tra loro, ovvero uno ed un solo elemento individuato da ciascuna sezione di Dedekind sui razionali. A corroborare la convinzione di aver colto una buona nozione di continuità, si osservi che ripetendo l'operazione di approssimare altre grandezze non con approssimazioni razionali ma con approssimazioni che usano le nuove grandezze, non si ottiene niente di nuovo, nel senso che si ottengono solo grandezze già approssimabili razionalmente. Infatti si consideri una sezione di Dedekind D in cui gli elementi dei suoi due insiemi siano già sezioni di Dedekind di razionali, al solito includendo nel primo insieme quella che eventualmente fosse maggiore od uguale di tutte quelle nel primo insieme della sezione e minore di tutte quelle del secondo insieme della sezione. (si è qui considerato un ordine tra sezioni che è naturale pensando all'ordine tra le grandezze che le sezioni vorreibero individuare, ma questo ordine può essere precisato anche senza far riferimento a tali grandezze, ma semplicemente dicendo che una successione è minore di una seconda se nel suo secondo insieme c'è un elemento che è nel primo insieme della seconda). Si può considerare allora la sezione di Dedekind di razionali D' nel cui primo insieme ci sono i razionali dei primi insiemi delle sezioni del primo insieme di D, e nel cui secondo insieme ci sono i razionali dei secondi insiemi delle sezioni del secondo insieme di D. Tale nuova sezione D' di razionali individua la stessa grandezza individuata da D, nel senso che è maggiore di tutte le sezioni di Dedekind sui razionali che appartengono al primo insieme di D e minore di tutte le sezioni di Dedekind sui razionali che appartengono al secondo insieme di D.

Le singole sezioni di Dedekind, o altre costruzioni equivalenti, possono essere usate come misura delle grandezze da loro determinate, e si può dire che queste misure costituiscono un continuo senza interruzioni nel senso sopra discusso.

Tra queste misure si possono facilmente individuare quelle corrispondenti a numeri naturali, interi e razionali.

Inoltre si possono facilmente introdurre operazioni in corrispondenza delle operazioni tra i razionali che sono le misure delle approssimazioni: così, ad esempio la somma tra due misure può essere definita come la misura determinata dalle approssimazioni per difetto e per eccesso che si ottengono sommando le approssimazioni per difetto e per eccesso rispettivamente delle due misure da sommare. Ovviamente, dette A e B le classi dei razionali che permettono di approssimare una grandezza e A' e B' le classi di razionali che permettono di approssimare l'altra grandezza da sommare, bisognerà far vedere che i due insiemi X={a+a': a appartiene ad A e a' appartiene ad A'} e Y={b+b': b appartiene a B e b' appartiene a B'} costituiscono una sezione di Dedekind, e dunque determinano una misura, che sarà quella definita come somma. Analogamente si può procedere con le altre operazioni e si può dimostrare che per esse valgono le solite proprietà che le caratterizzano anche in relazione con l'ordine (questo pure può essere legato all'ordine tra i razionali).

In tal modo le misure di cui si è parlato possono essere viste correttamente come un sistema di numeri che estende quello dei razionali, e come sistema di numeri prende il nome di <u>sistema dei numeri reali</u>.

Si è così ottenuto un sistema numerico fondamentale per l'uso della matematica, ma si è anche messo in luce quanto esso sia una costruzione scelta molto opportunamente per lo studio delle grandezze, ma senza alcun carattere di necessaria unicità nella sua scelta, e si sono anche lasciate aperte le porte per ulteriori sviluppi. A questo proposito si ricordi che il grande balzo avanti fatto dalla matematica nel 1600, con i contributi tra l'altro di Newton e di Leibniz, è stato realizzato utilizzando i numeri infinitesimi, che poi sono stati eliminati nel desiderio di utilizzare numeri "meglio conoscibili": nella precedente presentazione si è cercato di precisare un senso e una

giustificazione della locuzione “meglio conoscibili”, lasciando ad un altro momento l’indicazione dei pro del considerare anche i numeri infinitesimi, pro, che sono tuttora validi, e che avevano spinto i matematici di tre secoli fa ad utilizzarli.
[*Segue al n.* 115]

[*] Docente di Logica Matematica, Università degli Studi di Verona

CALCOLO DELLE PROBABILITÀ LO SPAZIO CAMPIONARIO

di Luciano Corso

Uno dei concetti essenziali del calcolo delle probabilità è lo spazio campionario. Conveniamo di identificare tale spazio con lo stesso simbolo “ Ω “ usato anche per contraddistinguere l’evento certo. Questa semplificazione di scrittura non produrrà alcun effetto se si sta attenti al contesto in cui Ω verrà usato.

Spesso si confonde lo spazio campionario costruito a partire da Ω con la classe additiva di eventi, altrimenti detta σ-algebra discreta (o semplicemente algebra). Vediamo, quindi, di chiarire ciò che si deve intendere per spazio campionario e la differenza che esiste tra spazio campionario e σ-algebra discreta.

L’idea di spazio campionario è legata strettamente al concetto di partizione di eventi fatta su un evento certo Ω.

Avrò un approccio sperimentale al problema.

Consideriamo il seguente problema: si vuole classificare un gruppo di n persone sulla base delle seguenti caratteristiche statistiche:
S = Stato di salute
B = Bellezza
F = Forza fisica
I = Intelligenza.

Rispetto all’evento di trovare una persona, pescando a caso nel gruppo, che abbia una particolare combinazione di questi 4 caratteri si costruisce:

1) lo spazio campionario Ω [Tab. 1];
2) una rappresentazione in diagramma di Venn di tale spazio, cioè del sistema degli eventi elementari associati all’esperimento [Fig.1].

Vediamo come.

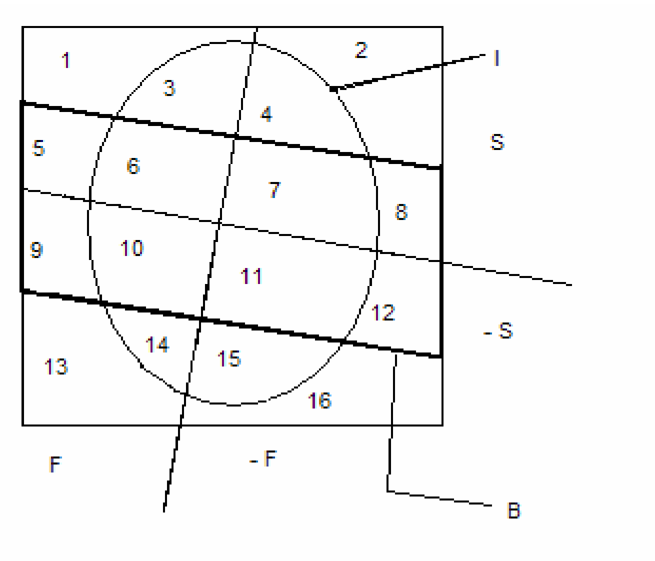


Fig. 1: spazio campionario Ω con riferimento all’esempio dell’articolo

Innanzi tutto si deve comprendere che ogni individuo dell’esperimento appartiene ad una parte di Ω. Ogni individuo, infatti, è caratterizzato da una quaterna di attributi relativi ai 4 caratteri presi in considerazione. Si noti che gli attributi vanno considerati sia in senso positivo (nell’averli), sia in senso negativo (nel non averli). Vediamo di dare una rappresentazione possibile di Ω. Per far ciò consideriamo in principio che le parti di Ω si possono già contare. Infatti se ogni carattere può avere o no un dato attributo di 2 possibili e i caratteri sono 4, allora il numero delle parti sono 2^n, cioè il numero delle funzioni da un n-insieme a un 2-insieme. Nel nostro caso esse sono $2^4 = 16$. Allora si tratta di trovare uno schema grafico in grado di rappresentare la situazione sperimentale. Proponiamo il diagramma di Venn di figura 1.

In questo diagramma, ho definito ogni parte della partizione di Ω assegnando contorni diversi ai vari eventi che hanno associata la quaterna di attributi da prendere per ogni carattere (che sono 4) tra i 2 possibili (sì, no). Assegnata a ciascuna parte di Ω la corrispondente quaterna di attributi che costituiscono il possibile evento elementare, osservabile nell’ipotesi che si estragga un individuo appartenente al gruppo analizzato, otteniamo:

Tabella 1. Eventi dello spazio Ω				
1	¬ B	F	¬ I	S
2	¬ B	¬ F	¬ I	S
3	¬ B	F	I	¬ S
4	¬ B	¬ F	I	¬ S
5	B	F	¬ I	S
6	B	F	I	S
7	B	¬ F	I	S
8	B	¬ F	¬ I	S
9	B	F	¬ I	¬ S
10	B	F	I	¬ S
11	B	¬ F	I	¬ S
12	B	¬ F	¬ I	¬ S
13	¬ B	F	¬ I	¬ S
14	¬ B	F	I	¬ S
15	¬ B	¬ F	I	¬ S
16	¬ B	¬ F	¬ I	¬ S

Questo è lo spazio campionario che ci interessa. Esso è il sistema completo di eventi elementari, necessari e incompatibili, riferibili all’esperimento. Se prendiamo in considerazione l’unione dell’evento 8 con quello che porta il numero 12, otteniamo un evento che non appartiene a Ω. Non si può dire che ogni sottoinsieme di Ω è una parte di Ω. Le parti di Ω sono solo 16 e sono una partizione di Ω, proprio quella nata dalla sistemazione da noi data all’insieme di eventi oggetto d’indagine. È questa la ragione per la quale occorre estendere lo spazio campionario di Ω.

La massima estensione si ha se si costruisce l’insieme potenza di Ω, come è noto. La sua cardinalità è $|P_\Omega|=2^{|\Omega|}$. L’insieme potenza di un insieme è chiuso rispetto alle operazioni di unione e di negazione (e quindi anche di intersezione). Si preferisce spesso costruire una classe additiva minima che a partire da Ω abbia tutti gli insiemi strettamente necessari a renderla chiusa rispetto alle operazioni di unione e di negazione. Tale classe additiva, con le rispettive operazioni di unione e negazione, si chiama σ-algebra discreta (o semplicemente algebra) minima e svolge un ruolo importante in teoria della misura e, in particolare, in calcolo delle probabilità. Uno spazio di probabilità è infatti caratterizzato da uno spazio campionario Ω, da una σ-algebra $\mathcal{F}$ e da una funzione di misura P; in sintesi si scrive: $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Sulla base dell’esperimento fatto, ogni evento della partizione di Ω ha assegnato una probabilità di verificarsi che corrisponde all’area associata a ogni evento di fig. 1, essendo esso – almeno nell’intenzione – un quadrato di lato unitario.

Per ogni evento certo Ω è possibile avere uno spazio campionario diverso a seconda del tipo di eventi che interessano al decisore.

Nella determinazione della partizione di Ω più opportuna, conviene scegliere quella che presenta più aderenza agli obiettivi che interessano e più semplicità di analisi.