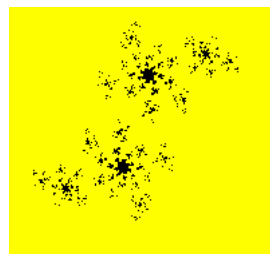


MatematicaMente

Publicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore: Luciano Corso - Redazione: Luciano Corso, Elisabetta Capotosto, Carla Benaglia - Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – 338 6416432 e-mail: lcorso@iol.it – Stampa in proprio - Numero 114 – aprile 2007



Natura simbolica del linguaggio della Matematica ^[1]

di Luciano Corso ^[2]

Una delle caratteristiche più significative della corrispondenza stretta tra matematica e arte, si ha nel recente sviluppo dei frattali, dove in modo molto sofisticato, sfruttando gli IFS (*Iterated Function Systems = mappe*) si è riusciti a costruire graficamente figure strane dove fantasia e processo deterministico si sono fusi in modo molto elegante arrivando alla realizzazione di oggetti assai interessanti dal punto di vista estetico.

Presento, di seguito, alcuni noti frattali (fig. 1, 2, 3) che descrivono bene questo tentativo. La figura 1 [B.1] è nota come curva di Koch (matematico svedese, 1906). Essa ha molte proprietà matematiche interessanti: in primo luogo ha, in tendenza, un perimetro di lunghezza infinita; ha poi un'area di misura finita.

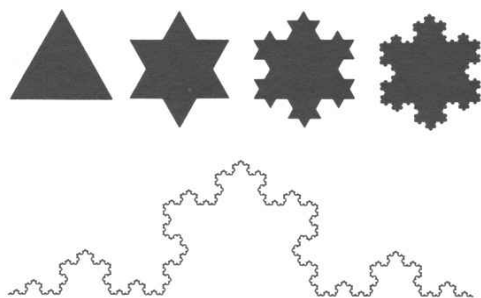


fig. 1

Il contorno ha composizione frastagliata risultante da una sequenza di trasformazioni autosimili che mandano dal tutto a ogni sua minima parte. Tale frastagliamento comporta la non derivabilità della funzione. La figura 1 viene descritta dal seguente sistema formale di trasformazioni affini (trasformazioni che mandano rette parallele in rette parallele) [B.3].

$$\{X; w_1, w_2, w_3, w_4\} :$$

$$w_1 = \begin{cases} x' = \frac{1}{3}x \\ y' = \frac{1}{3}y \end{cases}, \quad w_2 = \begin{cases} x' = \frac{1}{6}x - \frac{\sqrt{3}}{6}y + \frac{1}{3} \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{6}x + \frac{1}{6}y \end{cases},$$

$$w_3 = \begin{cases} x' = \frac{1}{6}x + \frac{\sqrt{3}}{6}y + \frac{1}{2} \\ y' = -\frac{\sqrt{3}}{6}x + \frac{1}{6}y + \frac{\sqrt{3}}{6} \end{cases}, \quad w_4 = \begin{cases} x' = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \\ y' = \frac{1}{3}x \end{cases} \quad (1)$$

Dove X è lo spazio topologico, con opportune proprietà, su cui agiscono le trasformazioni affini w_1, w_2, w_3, w_4 da applicare iterativamente a partire da una figura prototipo. Qui vale la pena di osservare la stretta corrispondenza tra la figura che vediamo e il sistema (1); cioè una descrizione formale di un fenomeno naturale o anche puramente ideale, contiene dentro di sé la stessa forza informativa di una rappresentazione grafica.

Si noti che la figura 1 e (1) differiscono anche per lo spazio di memoria occupato: (1) infatti occupa pochissima memoria rispetto alla figura 1. Per tale ragione dove è necessario comprimere le immagini, si preferiscono i sistemi simbolici della matematica rispetto alla rappresentazione di figure. Il termine «simulare», in matematica applicata, vuol dire descrivere mediante opportuni modelli formali il comportamento dei fenomeni naturali studiati, a meno di un errore trascurabile.

Se dovessimo descrivere con un qualsiasi linguaggio naturale, una qualunque delle figure 1, 2, 3, avremmo bisogno di pagine e pagine di parole. Risulta davvero straordinario vedere come con il linguaggio matematico si riesce a cogliere l'essenza di una rappresentazione o di una emozione con il minor numero possibile di simboli. Anche le figure 2 e 3 sono dei frattali e possono essere costruite facilmente con un programma al computer. La figura 2 rappresenta il noto insieme di Mandelbrot [B.2]. Esso risponde a una relazione molto semplice:

$$z_{n+1} = z_n^2 + c. \quad (2)$$

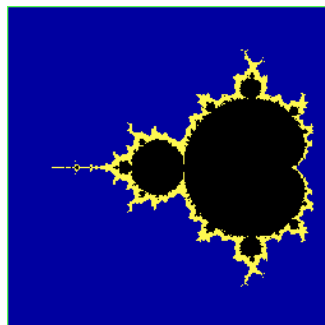


fig. 2



fig. 3

Sia la variabile z_n , sia la costante c sono definite in campo complesso. Con questa semplice relazione, possiamo costruire sia la fig. 2, sia la fig. 3 [B.2]. La fig.2 viene costruita selezionando nello spazio complesso compreso tra $-2,25 < Re(c) < 0,75$ e $-1,5 < Im(c) < 1,5$ quei punti in cui l'IFS $z_{n+1} = z_n^2 + c$ risulta stabile, ossia quei punti la cui traiettoria non fugge via all'infinito. Si fissano l'origine del ciclo ponendo $Re(z_{n=0}) = 0$ e $Im(z_{n=0}) = 0$ e un controllo della distanza del punto z_n dall'origine; se il punto z_n , all' n -esimo passo, è molto lontano dall'origine (nel ciclo io ho fissato una distanza maggiore di 4), allora si ferma il ciclo e si riparte da un nuovo punto di c , altrimenti (se il ciclo si esaurisce lasciando il punto z_n sullo schermo) il punto c da cui si è partiti rimane acceso assumendo un colore tanto più intenso quanto più rapida si è dimostrata la stabilità dell'orbita di z_n . E così via. Ovviamente si possono scegliere diversi tipi di colori e assegnarli in modo da distinguere i punti di stabilità, da quelli di lenta fuga, fino a quelli di rapida divergenza. Il gioco dei colori diventa importante per la qualità artistica dell'immagine. Nel nostro caso è stato assegnato il nero per i punti stabili, il giallo per quelli a lenta divergenza e infine il blu per quelli a più veloce divergenza.

Un altro linguaggio simbolico utilizzato per costruire le tre figure qui presentate, è quello della programmazione. Anche se la matematica risulta indispensabile per risolvere problemi di rappresentazione grafica di funzioni in autocomposizione (così si possono chiamare gli IFS), è necessario che le istruzioni da far eseguire al computer, per raggiungere lo scopo,

siano scritte in un linguaggio, ancora diverso: quello della programmazione per mezzo di software applicativi già predisposti. Il linguaggio della programmazione è un altro linguaggio, diverso rispetto a quello dell'algebra e della matematica, e serve a rendere più efficiente il processo che porta al risultato cercato. Qui di seguito presento l'insieme delle istruzioni in Qbasic che consentono di realizzare la figura 2. Per la costruzione della figura 3 rinvio, invece, al programma che si trova in [B.18].

Tabella 1: Insieme di Mandelbrot in Qbasic (3)

```

10 CLS
20 DIM r(201),i(201)
30 WINDOW 1,"Mandelbrot", (10,40)-(260,290)
160 FOR a = - 2.25 TO 0.75 STEP 0.05
165 conva=200+(250/3)*a
170 FOR b=-1.5 TO 1.5 STEP 0.05
175 conb=125+(250/3)*b
180 LET ok=0
190 LET Q=a^2+b^2
200 IF Q < 4 THEN 202 ELSE 210
202 r(0)=0 ; i(0)=0
204 ok=1
210 IF ok=1 THEN 230 ELSE 300
230 FOR n=0 TO 100
240 r(n+1)=r(n)^2-l(n)^2+a
250 i(n+1)=2*r(n)*i(n)+b
260 LET z=r(n+1)^2+i(n+1)^2
270 IF z>=4 THEN 271 ELSE 275
271 ok=0 : n=100
275 NEXT n
277 IF ok=1 THEN 290 ELSE 300
290 PSET (conva,convb)
300 NEXT b
310 NEXT a
410 END

```

Se confrontiamo la sequenza di istruzioni del programma (3) della tabella 1 con la relazione (2), vediamo la maggior potenza sintetica di (2) rispetto a (3). Tuttavia occorre osservare che mentre la (2) lascia una libertà di scelta interpretativa sulla opzioni del processo iterativo che si desiderano attuare, la (3) vincola l'esecuzione del programma alla realizzazione della figura 2. Una delle caratteristiche importanti degli IFS è che essi producono figure troncate: ciò che si vede e si produce è solo una approssimazione di quanto risulterebbe da un processo iterativo che continuasse all'infinito. Peraltro, l'errore di troncamento risulta abbastanza irrilevante ai fini pratici in quanto, oltre un certo livello di risoluzione, l'occhio umano non arriva. Il concetto di infinito matematico rappresenta un ideale astratto di azione dinamica che non corrisponde alla nostra esperienza. Noi di fatto ci muoviamo nel discreto e nel finito.

[Segue al n. 115]

[1] Questo lavoro è stato presentato dall'autore il 18 maggio presso la sala della Gran Guardia di Verona in occasione del "Maggio Scuola" organizzato dal **Comune di Verona**, su invito dell'IPSIA "Enrico Fermi" di Verona e nell'ambito del tema «Fluttuando nei linguaggi».

[2] Consigliere nazionale Mathesis – docente di Matematica applicata presso l'ITIS G. Marconi di VR – email: lcorso@iol.it

Some mathematics in the wine

di Stefano De Marchi [*]

Part I [Segue dal numero 113]

Wideness, Length and poly-alcohols of wines

These characteristics are related to the evolution of wines. We start with the definition of wideness.

Definition: We say that a wine is **wide**, when its visual, olfactive and gustative sensations are very intense, nearly *explosive*, but limited in time.

Therefore the wideness of wine is a function,

$$W: D_W \rightarrow R^3$$

which has a very high derivative in each direction. The (temporal) support D_W can be considered as a small interval of R_+ .

On the other hand, the length of a wine expresses slow changes in time.

Definition. We say that a wine is **long**, when its visual, olfactive and gustative sensations show off slowly in time.

Then, the length of wine is a function,

$$L: D_L \rightarrow R^3$$

which has slowly growing derivatives in each direction. The (temporal) support D_L can be considered as all R_+ .

A third aspect, which introduces us to the *evolutionary system* representing a wine, is found in the gustative analysis, that is the poly-alcohols. These are the most important compounds of a wine and are fundamental for its structure, in particular they represent the soft part of its structure. They are mostly due to the glycerine content. A wine with respect to poly-alcohols can be *sharp, scarcely soft, quite soft, soft and velvety*.

In mathematics, these characteristics can be represented, or better, modelled by functions of increasing regularity, positive and "bell-shaped" like, for instance, polynomial *splines*. Polynomial splines, or simply splines, are piecewise continuous polynomials connected with the highest possible degree of continuity at the connection points. The classic cubic spline, which is of order 4, is globally C^2 . In general splines of degree k , order $k+1$, are globally $k-1$ continuous. Splines have also a stable basis formed by the B-splines or *Basic-splines*. In Fig. 3, we plot five *B-splines* of orders 2 up to 6 on the unit interval, which are C^s , $s=1, \dots, 5$ respectively, and that can be seen as an original mathematical representation of the corresponding scale of poly-alcohols in a wine. The readers interested to splines functions can refer, for example, to the fundamental book by Carl de Boor [2]. An example of wines which are *simply continuous*, we mention the Italian *Verdicchio* or the German *Riesling* ("troken" type). For wines which are very smooth, i.e., velvety, we may recall the French *Sauterns* or the Hungarian *Tokaj Aszu*.

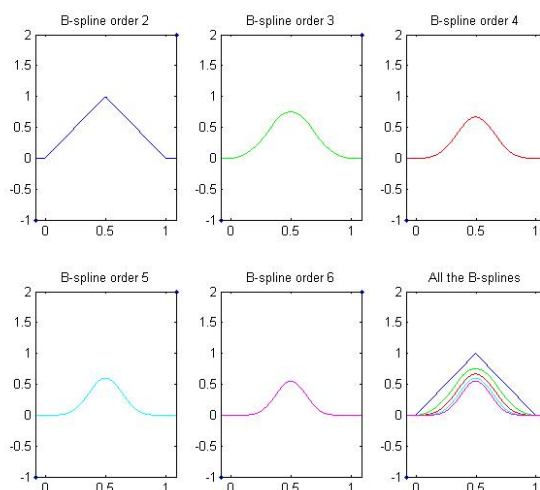


Fig. 3: B-splines of orders 2 up to 6 on the unit interval

Bibliografia: [1] Associazione Italiana Sommeliers, *Tecnica della Degustazione*, 1B. Ed. AIS (2001). [2] Carl de Boor, *A practical guide to splines*, Appl. Mathematical Sciences 27, Ed. Springer, Rev. Edition (2001). [3] A. Rigamonti and A. A. Varlamov, *Nunc est Bibendum: Diverstimento di Fisici attorno a bicchieri di vino*, Il Nuovo Saggiatore, Gen. 2004.

[*] Department of Computer Science, University of Verona (Italy), email: stefano.demarchi@univr.it