MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore: Luciano Corso - Redazione: Luciano Corso, Elisabetta Capotosto, Carla Benaglia - Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – 338 6416432
e-mail: lcorso@iol.it – Stampa in proprio - Numero 115 – maggio 2007

Discreto e Continuo

di Ruggero Ferro [1]

Alleggerire le sezioni [*Segue dal numero 112*]

Ci si può anche domandare se in tutto lo sviluppo svolto fosse proprio necessario considerare tutte le approssimazioni per difetto e per eccesso. Quando in pratica si misura, si cerca di avvicinarsi sempre più alla grandezza da misurare, magari con sole approssimazioni per difetto.

Si potrebbero considerare solo le approssimazioni per difetto (un insieme non vuoto), fare a meno di tutte le approssimazioni per eccesso, (o viceversa), ma bisogna conservarne almeno una che indichi che la grandezza da misurare non sia maggiore di ogni multiplo naturale dell'unità di misura e dunque inarrivabile e non misurabile. La condizione qui descritta viene richiamata dicendo che l'insieme delle approssimazioni per difetto è superiormente limitato. Inoltre invece di considerare tutte le approssimazioni per difetto (incluse le più lontane dalla grandezza che si vuole misurare), se ne potrebbero considerare solo alcune, purché esse si avvicinino sempre più alla grandezza da misurare. Ovviamente ciascuna approssimazione non si muove, ma quello che si vuol dire è che fissato comunque un numero naturale n deve essere considerata anche almeno una approssimazione razionale per difetto che differisca dalla grandezza che si vuole misurare per meno di $(1/n)U$, dove U è al solito l'unità di misura. Così la richiesta che ogni sezione di Dedekind indichi una ed una sola grandezza può essere riformulata dicendo che ogni insieme superiormente limitato ha estremo superiore. Si dimostra che queste due affermazioni sono equivalenti in qualsiasi insieme totalmente ordinato (eventualmente numerico), nel senso che se ogni sottinsieme superiormente limitato ha estremo superiore, allora ogni sezione di Dedekind in quel insieme indica un unico elemento di quel insieme, e, viceversa, se ogni sezione di Dedekind in quel insieme indica uno ed un solo elemento dell'insieme allora ogni sottinsieme superiormente limitato ha estremo superiore.

Disponendo di un sottinsieme superiormente limitato che abbia un certo estremo superiore, si possono considerare dei suoi elementi sempre più vicini all'estremo superiore, cioè una successione crescente di suoi elementi che abbia lo stesso estremo superiore.

Ci si potrebbe domandare se, per individuare una grandezza, invece di considerare approssimazioni sempre per difetto (o sempre per eccesso) sia possibile considerare approssimazioni un po' per eccesso e un po' per difetto, e la risposta è si a condizione che le approssimazioni si avvicinino (nel senso precisato prima) realmente a quanto si vuole determinare. Questa ultima condizione, senza utilizzare la conoscenza della grandezza che si vuole approssimare, si traduce nella condizione di Cauchy per le successioni. Così si dimostra che in un insieme totalmente ordinato ogni successione di Cauchy converge (ha limite) se e solo se ogni insieme superiormente limitato ha estremo superiore. Queste osservazioni si legano con quanto esposto nella nota "Dai numeri naturali ai numeri reali", e pertanto non vengono qui dimostrate.

Viste queste osservazioni, l'ipotesi di completezza (ogni sezione di Dedekind sui razionali individua uno ed un solo elemento reale, il suo unico elemento separatore) può essere riformulata equivalentemente nelle affermazioni seguenti: "ogni insieme superiormente limitato di razionali ha estremo superiore tra i reali" e "ogni successione di Cauchy di razionali ha limite nei reali". Le tre affermazioni equivalenti ottenute sono equivalenti anche alle seguenti tre affermazioni: "ogni sezione di Dedekind sui reali individua uno ed un solo elemento reale", "ogni insieme superiormente limitato di reali ha estremo superiore tra i reali" e "ogni successione di Cauchy di reali ha limite nei reali", dal momento che si dimostra, come accennato, che il ripetere l'operazione di cercare ulteriori grandezze approssimando non porta a niente di nuovo. Si osservi che nelle ultime tre formulazioni non c'e' alcun riferimento al sistema numerico dei razionali, ma si considera solo quello dei reali. Questo, mentre può essere un vantaggio di semplificazione senza far riferimento ad altri sistemi, fa perdere tuttavia il riferimento alla finitezza dei singoli numeri naturali che ha guidato e motivato le scelte fatte per arrivare ai reali.

Ancora una osservazione su quanto si è fatto. Dopo aver considerato la possibilità che tra i due insiemi di una sezione di Dedekind sui razionali ci possano essere più di un elemento, ed aver quindi parlato di infinitesimi e di grandezze infinitamente vicine, si è tralasciata questa direzione dicendo che non si possono distinguere tra loro diversi infinitesimi utilizzando grandezze commensurabili con l'unità di misura, sicché è difficile precisare cosa siano gli infinitesimi. Tuttavia, anche se non si possono precisare con metodi basati sulla finitezza di ciascun numero naturale, a priori potrebbero essere chiariti in altro modo. Comunque vengano chiariti è importante che con essi si possa formare un sistema numerico, se deve essere possibile utilizzarli: ciò può essere fatto dicendo che i nuovi enti hanno un comportamento del tutto uguale a quello dei reali. Questa affermazione, dovuta a Leibniz, può lasciare perplessi, perché l'archimedeità dei reali non vale se si aggiungono gli infinitesimi positivi, però l'affermazione di Leibniz può essere resa precisa, corretta e funzionale se si precisa che il comportamento uguale deve essere realizzato rispetto a tutte le proprietà descrivibili con un adeguato linguaggio (l'archimedeità del sistema dei numeri reali non è descrivibile in nessun linguaggio, come non lo è il sottinsieme dei reali costituito dai naturali, e la nozione di finito). Con questa precisazione si può costruire un nuovo sistema numerico, chiamato degli iperreali, che estende il sistema dei numeri reali (più precisamente elementarmente equivalente al sistema dei reali) e che include gli infinitesimi positivi. Questo sistema sarà ancora continuo almeno quanto lo è il sistema dei reali che è contenuto in questo, ma è continuo in un senso anche più forte poiché quanto, nel linguaggio, è esprimibile della continuità rimane vero, e può essere applicato anche a grandezze infinitesime e non solo alle archimedee.

[1] Docente di Logica Matematica - l'Università degli Studi di Verona

Natura simbolica del linguaggio della Matematica [1]

di Luciano Corso [2]

[*Segue dal numero 114*] Tuttavia occorre riconoscere che l'idea astratta di infinito risulta quasi indispensabile per una sistemazione elegante di certi concetti teorici della matematica e dell'arte. Abbiamo la prova che anche sull'idea di infinito esistono corrispondenze strette tra matematica e arte. In [B.4] e [B.19] abbiamo ulteriori prove della possibilità dell'uso della matematica, del suo linguaggio, per la realizzazione di ipotetiche cattedrali o figure di natura.

Già nelle rappresentazioni geometriche classiche emerge evidente il potere concettuale della matematica nello sviluppo di figure eleganti. Qui mi limito a ricordare la spirale di Archimede e, ancor più, quella logaritmica, che sono molto ricorrenti in natura.

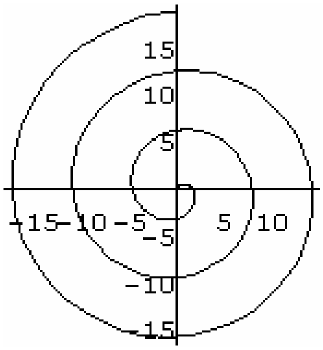

fig. 4: *Spirale di Archimede*

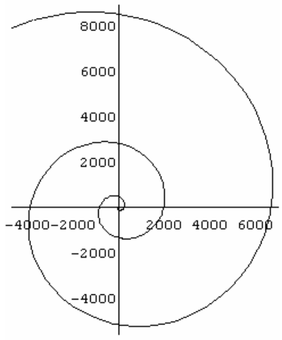

fig. 5: *Spirale logaritmica*

La spirale di Archimede è descritta in forma sintetica dalla seguente equazione in coordinate polari: $\rho = \alpha \cdot \theta$ (4), dove ρ è la distanza del punto dal centro, θ è l'angolo descritto dal raggio vettore e α è un opportuno coefficiente caratteristico della spirale.

Con il programma MATHEMATICA della *Wolfram Research* le curve delle figure 4 e 5 si tracciano con poche istruzioni.

Occorre dire che la bellezza della figura geometrica è abbinata, come sempre, a una stringatissima ed elegante espressione algebrica (5).

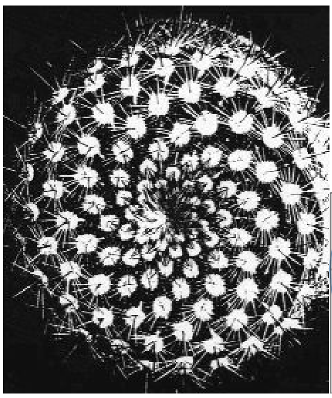

Fig. 6

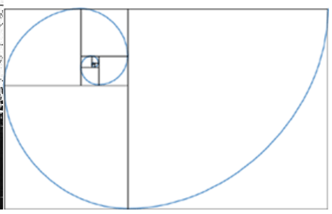

Fig. 7

La figura 6 mostra lo sviluppo spiraliforme di una cactacea. La fig. 7 mostra come la spirale aurea evolve sempre in sezioni quadrate di lato via via crescente secondo le regole della sezione aurea.

Ancora più interessante pare essere l'equazione in coordinate polari che descrive la spirale logaritmica (*spira mirabilis* di Jacques Bernoulli) [B.9]:

$$\rho = a\, e^{t \cdot \cot(\alpha)} \qquad \text{o} \qquad \rho = a^{\theta} \qquad (5)$$

Dove α è l'angolo costante formato dal raggio e dalla tangente. Tra l'altro, la spirale logaritmica è una manifestazione generale di una particolare spirale: la spirale aurea. Quest'ultima rappresenta una estensione concettuale della equazione alle differenze che consente di costruire i numeri di Fibonacci (= *Filius Bonacci*, ovvero Leonardo Pisano):

[B.5, pag. 191 e B.89]

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \qquad (n\!: n \in \mathbf{N},\, n > 1,\, F_0 = 0,\, F_1 = 1) \qquad (6)$$

Applicando questa equazione alle differenze finite, si costruisce la nota sequenza

$$\langle 0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89,\ 144,\ 233,\ \ldots \rangle .$$

Lo zero nella sequenza viene aggiunto solo per completezza formale anche se il termine non ha alcun significato naturale. Quando Fibonacci arrivò a questa sequenza credo che non pensasse neppure lontanamente quali e quante applicazioni si sarebbero avute a partire da questo risultato. Il problema che ha dato origine alla sequenza è il seguente: Tizio ha una coppia di conigli che, quando ha raggiunto i due mesi di età, genera una nuova coppia ogni mese e non muore mai. In un anno, quante saranno le coppie di conigli di Tizio? Vi sono delle belle rappresentazioni ad albero dello sviluppo della natalità di queste coppie. Io qui rappresento lo sviluppo nella tabella 2, di lettura immediata:

Tabella 2								
a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	…
							p_7	…
						i_6	i_7	…
					f_5	f_6	f_7	…
							q_7	…
		b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	…
							r_7	…
						l_6	l_7	…
							s_7	…
			c_3	c_4	c_5	c_6	c_7	…
							t_7	…
						m_6	m_7	…
					g_5	g_6	g_7	…
							u_7	…
				d_4	d_5	d_6	d_7	…
						n_6	n_7	…
					h_5	h_6	h_7	…
							v_7	…
				e_4	e_5	e_6	e_7	…
							z_7	…
						o_6	o_7	…

I numeri al pedice identificano i periodi (in mesi) trascorsi, le lettere rappresentano le coppie di conigli. a_0 è la coppia di partenza quando nessun periodo è ancora trascorso. Se al 7° mese le coppie sono 21, applicando la (6) si ha: $F_8 = F_7 + F_6 = 21 + 13 = 34$, $F_9 = 34 + 21 = 55$, $F_{10} = 55 + 34 = 89$, $F_{11} = 89 + 55 = 144$, $F_{12} = 144 + 89 = 233$.

La (6) è strettamente legata al rapporto aureo. Infatti risolvendo l'equazione alle differenze si ottiene:

$$(\lambda^2 - \lambda - 1)\, F_n = 0$$

$$\lambda_1 = (1+\sqrt{5})/2 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = (1-\sqrt{5})/2. \qquad \text{(6 bis)}$$

Il numero $\phi = (1+\sqrt{5})/2 = 1{,}61803\ldots$ è detto rapporto aureo e viene usato spesso in molti ambiti artistici. Si narra che Fidia lo avesse usato spesso per le sue sculture. Il rapporto $\lambda_2 = 1/\phi = 0{,}61803\ldots$ è altrettanto importante e viene detto numero aureo. [*Segue al numero 116*]

[1] Questo lavoro è stato presentato dall'autore il 18 maggio presso la sala della Gran Guardia di Verona in occasione del "**Maggio Scuola**" organizzato dal **Comune di Verona**, su invito dell'IPSIA "Enrico Fermi" di Verona e nell'ambito del tema «Fluttuando nei linguaggi».

[2] Consigliere nazionale Mathesis – docente di Matematica applicata presso l'ITIS G. Marconi di VR – email: lcorso@iol.it

Dilemmi irrisolti

Mi chiedo spesso se non sia possibile una società più "normalmente" colta, più modernamente colta. Possiamo sperare in una formazione scolastica che prepari un cittadino in modo tale che egli di fronte a una equazione non si spaventi più e sappia almeno capirne il significato, in un dato contesto scientifico, di fronte al risultato di una applicazione tecnologica ne comprenda il valore per il bene dell'uomo e di fronte a un verso del Leopardi non prenda in giro i poeti ?(L. C.)