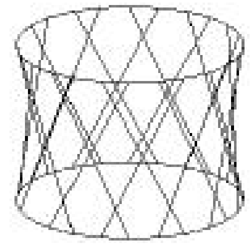
MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore: Luciano Corso - Redazione: Luciano Corso, Elisabetta Capotosto, Carla Benaglia - Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – 338 6416432
e-mail: lcorso@iol.it – Stampa in proprio - Numero 116 – giugno 2007



Natura simbolica del linguaggio della Matematica [1]

di Luciano Corso [2]

[*Segue dal numero 115*]

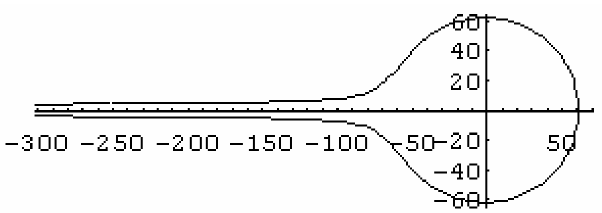
Tabella 3

Carta di credito e sezione aurea

Il rapporto tra i lati del rettangolo qui raffigurato rispetta la sezione aurea. Se la base è 1,61803…, allora la sua altezza è 1; oppure se la base è 1, allora la sua altezza è 0,61803…
Molte carte di credito, indicativamente, sono rettangoli in rapporto aureo. La finestra grafica del più potente software applicativo di matematica oggi esistente, MATHEMATICA della Wolfram Research rispetta i rapporti della sezione aurea.

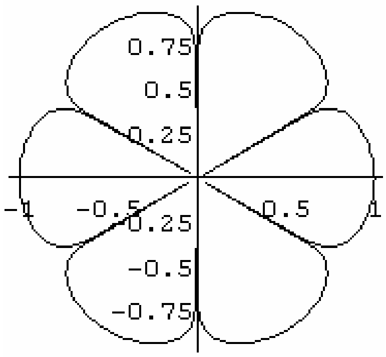
La struttura formale della matematica dimostra ampiamente una potenza esplicativa e operativa ineguagliabili. Qui di seguito presento due composizioni grafiche, facili da ottenersi con il software applicativo *Mathematica* della Wolfram Research [B.14 e 15]:

Tavola 4



Ampolla rovesciata di Luciano Corso. La presente figura mi è venuta quasi per caso (Occhio: il caso aiuta il 50% delle volte, le altre danneggia!). L'equazione in coordinate polari è:

$$f(t)=\frac{t}{\cos\left(t-\frac{\pi}{2}\right)}+60 \quad : \quad \{-\pi \le t \le \pi\}$$



Le rose di Grandi possono dare molti spunti a chi si interessa di grafica. Qui viene presentato un fiore a sei petali di coordinate parametriche pari a:

$$\begin{cases} \{o \le t \le 2\cdot\pi\} \\ r(t)=\exp\left[\log\left|\cos\left(\frac{6\cdot t}{2}\right)\right|^{\frac{1}{12}}\right] \\ x(t)=r(t)\cdot\cos(t) \\ y(t)=r(t)\cdot\sin(t) \end{cases}$$

Musica e Matematica

La musica, qualsiasi suono, qualunque onda sonora o insieme di onde sonore è rappresentabile matematicamente mediante le famose trasformate di Fourier (o sviluppi in serie di Fourier).
Come approssimare una melodia con una formula matematica? Supponiamo che esista una funzione continua $f(x)$ che possa descrivere un suono o un'armonia. Se $f(x)$ rispetta certe condizioni analitiche, possiamo dimostrare che essa è rappresentabile anche come sviluppo in serie del seguente tipo [B.6]:

$$f(x)=\sum_{k\ge 0} A_k\cdot\sin(k\cdot x+\varphi_k) \quad ; \quad \forall k\in \boldsymbol{N} \qquad (7)$$

Da questa relazione facilmente si arriva a

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k\ge 1}\left[a_k\cdot\cos(k\cdot x)+b_k\cdot\sin(k\cdot x)\right]=f(x)\,.$$

Se si verifica (7), si dice anche che la serie converge a $f(x)$.
Per risolvere il problema, dobbiamo trovare le coppie di parametri
$(a_0, b_0), (a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_n, b_n)$ (8)
$\forall k$ fino all'n-esimo termine dello sviluppo. Queste coppie permettono l'approssimazione migliore all'armonia sperimentata.

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left[a_k\cdot\cos(k\cdot x)+b_k\cdot\sin(k\cdot x)\right]+\varepsilon(n) \qquad (9)$$

Con il metodo dei minimi quadrati si stimano le coppie di parametri (a_k, b_k) del modello:

$$S(a_k,b_k)=\sum_{j=1}^{w}\left[y_j-\frac{a_0}{2}+\right.$$

$$-\sum_{k=1}^{n}\left[a_k \cdot \cos(k \cdot x_j) + b_k \cdot \sin\left(k \cdot x_j\right)\right]\Big]^2 \qquad (10)$$

Della funzione $S(a_k, b_k)$ vanno ricercati i parametri a_k e b_k che la rendono minima. Si calcolano quindi le derivate parziali di $S(.,.)$ e si pongono uguali a zero:

$$\frac{\partial S(a_k, b_k)}{\partial a_k} = 0 \quad e \quad \frac{\partial S(a_k, b_k)}{\partial b_k} = 0 \quad , \quad \forall k \qquad (11)$$

Si ottengono così le sequenze di parametri (8). Trovati i parametri della serie di Fourier troncata, si usa la (9) per descrivere il suono, a meno di un errore $\varepsilon(n)$ piccolo a piacere, irrilevante per l'orecchio umano.

Può sembrare strano a chi non conosce queste tecniche di sviluppo in serie che, data una sinfonia di Bach, sia possibile, mediante un processo di accostamento noto in statistica-matematica come principio dei minimi quadrati, descriverla formalmente in modo completo o al massimo con una approssimazione tanto raffinata da non consentire anche agli orecchi più esperti di accorgersi di un eventuale scostamento. E ciò che appare straordinario è che la percezione di un qualunque tipo di suono, corrisponde perfettamente alla descrizione formale che se ne può fare con la matematica.

Qui di seguito rappresento come un'onda quadra (caso di monotonia) possa essere descritta da uno sviluppo in serie di Fourier troncato alla quarta armonica.

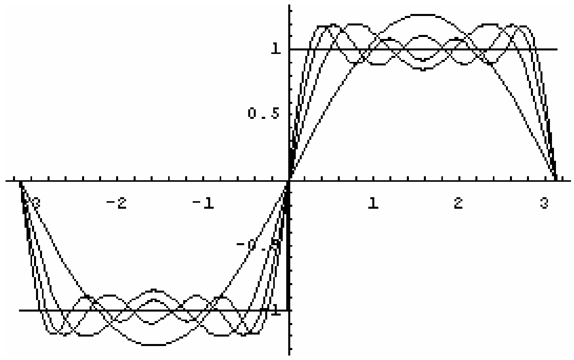


Fig. 6

Il linguaggio poetico e la matematica

La poesia, forse per prima rispetto a qualunque altra manifestazione artistica, ha dentro di sé i migliori contenuti della matematica. La potenza del linguaggio poetico nel saper cogliere le emozioni che portiamo dentro di noi con poche parole e con eleganza espressiva presenta una forte somiglianza con la potenza del linguaggio matematico nel cogliere ciò che si manifesta in natura e desta la nostra curiosità. Entrambi i linguaggi sono stringati, ermetici, essenziali; entrambi hanno capacità di cogliere le forti emozioni della vita [B.10].

Si consideri, a esempio [Tabella 5], come la rabbia umana di fronte all'impotenza di capire l'amore, la vita, i suoi accidenti e, forse, l'impotenza umana nella ricerca della serenità si presenta in una delle sue massime espressioni in questi stupendi ed essenziali versi del grande Catullo [B.11]:

Tabella 5
Gaio Valerio Catullo *Odi et amo. Quare id faciam fortasse requiris* *Nescio, sed fieri sentio et excrucior.* Traduzione di Giulio Galetto *Odio e amo.* *Non domandarmi, perché:* *non lo so.* *Li sento dentro, l'odio e l'amore.* *Ed è una croce.*

Tutti ci siamo cimentati almeno una volta nella vita con le notevoli difficoltà concettuali del senso ontologico dell'essere in rapporto all'immanenza del nulla, del vuoto. Ma l'essenzialità e la semplicità espressiva su questi argomenti, che emergono dai poeti, non possono essere uguagliate.

Al poeta non occorrono molte parole per descrivere emozioni, paure, gioie, piaceri, così come al matematico non sono necessari trattati per rappresentare le componenti essenziali dei fenomeni naturali.

Cosi' se noi affermiamo simbolicamente che

$$\Delta X_t = a \cdot X_t - b \cdot X_t^2 \quad , \quad \left\{t \middle| t \in N, X_t \geq 0\right\} \qquad (12)$$

Con riferimento alla crescita ΔX_t di una popolazione di individui X_t con un tasso di natalità a e uno smorzatore b, esprimiamo sinteticamente una simulazione di un comportamento naturale che ha una struttura notoriamente caotica nello spazio degli stati (B.2 e B.5).

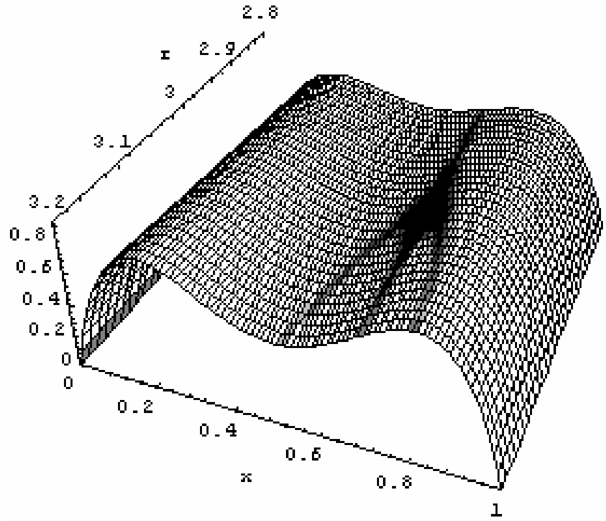


Fig. 7. L'ombra delle biforcazioni nel caos deterministico in (12)

Vi sono sintesi ermetiche ancora più potenti ed essenziali per rappresentare lo stato di un uomo di fronte al mistero della vita e alla condizione umana. A volte sono frasi su cui si riflette poco circa la loro potenza concettuale, ma che manifestano una forza espressiva raramente eguagliabile.

A volte la forma ermetica raggiunge la qualità della poesia senza volerlo, senza una predefinizione volontaria, attraverso una sentenza che riesce a cogliere in modo esemplare il baratro tra l'essenza della natura e le nostre presunzioni filosofiche. In *Hamlet* di W. Shakespeare [B.7] si legge quanto riportato in tabella 6: [*Segue al n.* 117]]

Tabella 6
[...] *There are more things in heaven and earth,* *Horatio,* *Than are dreamt of in your philosophy.*[...]
Ci sono molte più cose in cielo e in terra, *Orazio,* *Di quante ne possa immaginare la vostra filosofia.*

L'enunciato afferma con una carica straordinaria il potere dei fenomeni naturali sulla debolezza delle capacità speculative degli uomini, l'immanenza della conoscenza potenziale rispetto a quella umana. [*Segue al n. 117*]

[1] Questo lavoro è stato presentato dall'autore il 18 maggio presso la sala della Gran Guardia di Verona in occasione del "**Maggio Scuola**" organizzato dal **Comune di Verona**, su invito dell'IPSIA "Enrico Fermi" di Verona e nell'ambito del tema «Fluttuando nei linguaggi».

[2] Consigliere nazionale Mathesis – docente di Matematica applicata presso l'ITIS G. Marconi di VR – email: lcorso@iol.it