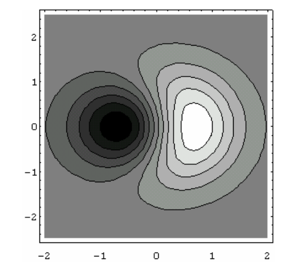
MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore: Luciano Corso - Redazione: Luciano Corso, Elisabetta Capotosto, Carla Benaglia - Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – 338 6416432
e-mail: lcorso@iol.it – Stampa in proprio - Numero 119 – settembre 2007



Buchi neri, informazione, computazione a scale ultramicroscopiche

di Paolo Di Sia ([1,2]), Valerio Dallacasa ([1])

La fisica dei buchi neri

[Segue dal numero 118] Come si nota, gli unici parametri risultano essere la **massa**, la **carica** e il **momento angolare**. Ciò ha condotto ad asserire che nell'universo accessibile verrebbe violata la 2^A legge della termodinamica. Venne introdotta così una distinzione "ricercata" tra la fisica all'interno dei buchi neri e quella del resto dell'universo.

Il fisico israeliano **J. D. Bekenstein**, in un complesso lavoro del 1972, ha considerato una termodinamica dei buchi neri che ne spiega il comportamento energetico collegandosi in maniera diretta ai principi fondamentali della fisica, determinando una formula di generalizzazione dell'entropia, che collega gli aspetti tradizionali di questa con la crescita dell'area del buco nero. Il buco nero funzionerebbe come una specie di recipiente di deposito di energia. Oltrepassato l'orizzonte degli eventi, viene immagazzinata in modo assai particolare, in grado di consentire l'insorgere di effetti di **super-radianza**. La super-radianza viene descritta da un termine non lineare nelle equazioni che permettono ad un sistema quantistico di entrare in uno stato di correlazione molto alta e di lanciare di rimando le perturbazioni energetiche esterne compattate e intensificate. Il risultato di **Bekenstein** del 1972 è più generale del precedente e prevede come caso particolare la radiazione di **Hawking**. In particolare il cosiddetto "limite di Bekenstein" emerge in maniera "naturale" dalla termodinamica dei buchi neri e ha valore assolutamente generale, non essendo direttamente connesso, nella sua formulazione matematica, a condizioni di natura gravitazionale.

Claude Shannon, definito da molti il padre della teoria dell'informazione, ha scritto un lavoro pionieristico in tale campo. Consideriamo l'informazione, matematicamente espressa dalla relazione:

$$I = -\log_2 P . \tag{1}$$

Si utilizza il logaritmo in base **2** della probabilità P che si verifichi un dato evento e questo permette di ottenere un valore misurato in **bit**. Dall'entropia espressa dalla relazione di **Boltzmann** si ricava l'uguaglianza:

$$S = \log_2 P \tag{2}$$

la quale permette di esprimere l'entropia nella medesima unità di misura dell'informazione, ossia il bit. Dalle (1) e (2) si conclude che:

$$I = -S \tag{3}$$

Tale relazione può essere considerata come un indicatore dell'ordine di un sistema fisico e la si può enunciare come: "a un aumento di entropia corrisponde una perdita di informazione su un dato sistema, e viceversa".

L'approccio termodinamico permette di fissare un certo contenuto massimo di informazione per un sistema fisico di una data massa (o alternativamente un limite all'entropia). Il concetto di informazione viene in questo modo ad essere considerato una grandezza fondamentale, al pari ad esempio dell'energia. È sorta così l'Idea di poter descrivere la molteplicità dell'universo come una complessa rete di informazioni che di continuo passa da un livello macroscopico ad uno microscopico, in accordo con il 2° principio della termodinamica e viceversa, secondo diversi schemi organizzativi che risultano legati anche alla struttura fine dello spaziotempo.

In seguito alle implicazioni del teorema "No Hair", quando una particella cade in un buco nero porta con sé la sua informazione che, vista dal nostro universo, va persa. Ma secondo la teoria dell'informazione, tale perdita comporta un aumento di entropia. L'informazione che il buco nero cattura non viene più restituita; viene totalmente perduta poiché ad un certo punto il buco nero evapora completamente. Ciò che restituisce è radiazione termica, da cui non è possibile ricavare informazione.

Studi ancora controversi suggeriscono invece che molto dell'informazione che cade in un buco nero possa uscire; ciò ha portato a congetturare che i buchi neri potrebbero un giorno essere utilizzati come computer quantistici estremamente accurati. Negli anni '70 **Hawking** ha utilizzato la meccanica quantistica per mostrare che i buchi neri emettono radiazione e che possono anche evaporare totalmente. In origine egli riteneva che tale radiazione è talmente "casuale" da non poter riportare fuori informazione circa ciò che vi è caduto. Ciò però conflitta con la meccanica quantistica, la quale stabilisce invece che l'informazione quantistica non può essere persa. **Hawking** ha ripreso in seguito il suo pensiero e nel 2004 ha dichiarato che i buchi neri non distruggerebbero totalmente l'informazione. Il problema rimane ancora aperto.

Per comprendere la natura dei buchi neri e verificarne la teoria, si utilizzano come strumenti teorici modelli analoghi, come ad esempio i superfluidi. Agli inizi degli anni '80 lo scienziato canadese **W. Unruh** notò che la propagazione del suono in un superfluido (come l'elio liquido) e la propagazione della luce in uno spaziotempo curvo sono governate dalle stesse equazioni. Il comportamento dei fononi (i quanti di suono) in un superfluido è lo stesso di quello dei fotoni (i quanti di luce) in uno spaziotempo curvo. Ciò comporta che una regione supersonica può venir considerata come un buco nero acustico ed essere utilizzata per comprendere l'origine della radiazione di **Hawking**.

Studiosi della SISSA di Trieste, studiando il processo di formazione di un buco nero acustico, hanno evidenziato che viene emessa una radiazione termica indistinguibile dalla radiazione di **Hawking**, anche nel caso in cui l'orizzonte acustico si formi solo asintoticamente, a tempi infiniti. Non serve pertanto formare una regione analoga all'orizzonte degli eventi per assistere all'emissione della radiazione di **Hawking**.

Ciò ha dato vita ad un nuovo scenario innovativo riguardante la fisica dei buchi neri. Ritenendo possibile supporre che effetti di natura quantistica prevengano la formazione dell'orizzonte degli eventi, si è introdotto il concetto di "quasi buco nero" come nuovo modello: indistinguibile da un buco nero, ma in realtà con una struttura radicalmente diversa in prossimità della sua superficie. Da un punto di vista teorico, tale nuovo scenario in cui l'orizzonte si forma solo in tempi infiniti sembra permettere di dimostrare che l'informazione non andrebbe perduta.

Computazione a scala ridotta

Supponiamo di voler eseguire una computazione altamente seriale su pochi bit; risulta allora vantaggioso comprimere le dimensioni del computer per ridurre il tempo di invio dei se-

gnali. "Rimpicciolendo" il computer, per valori fissati di energia, la densità della stessa al suo interno cresce. Tale crescita comporta di necessità l'"esplorazione" di diversi regimi della fisica delle alte energie nel corso della computazione. Dapprima viene raggiunta la scala di unificazione debole, quindi quella di grande unificazione; infine, quando la dimensione lineare del computer si avvicina al suo raggio di Schwarzschild, si raggiunge la scala di Planck (nessuna tecnologia conosciuta può attualmente raggiungere tale compressione).
Alla scala di Planck risultano importanti sia gli effetti gravitazionali che quelli quantistici. A tali scale la lunghezza d'onda Compton di una particella di massa **m**:

$$\lambda_c = \frac{2 \cdot \pi \cdot \hbar}{m \cdot c} \tag{4}$$

risulta dell'ordine del suo raggio di Schwarzschild:

$$R_c = 2 \cdot G \cdot m / c^2 \tag{5}$$

Detto in altri termini, per descrivere il comportamento di un oggetto alle dimensioni di Planck, ossia per lunghezza, tempo e massa dati da:

$$L_{Pl} = \sqrt{\hbar \cdot G / c^3} \approx 1.616 \cdot 10^{-35} m \tag{6}$$

$$t_{Pl} = \sqrt{\hbar \cdot G / c^5} \approx 5.391 \cdot 10^{-44} \sec \tag{7}$$

$$m_{Pl} = \sqrt{\hbar \cdot c / G} \approx 2.177 \cdot 10^{-8} Kg \tag{8}$$

è richiesta una teoria di unificazione di gravità quantistica o una teoria di superstringa, teorie ad oggi ancora in fase di studio. Sebbene non sia possibile conoscere il numero esatto di bit che possono essere registrati da un computer della massa ad esempio di **1 Kg** confinato nel volume di **1 litro**, è possibile conoscere il numero esatto di bit che possono essere registrati da un computer di **1 Kg** che è stato compresso alla dimensione di un buco nero. Questo perché l'entropia di un buco nero ha un valore ben definito.

Nella analisi che segue, vengono utilizzate le proprietà dei buchi neri per cercare di fornire dei limiti su velocità, spazio di memoria e grado di computazione seriale di un computer compresso alla dimensione più piccola possibile. Che tali limiti possano essere raggiunti o meno anche in linea di principio, è una questione la cui risposta dovrà attendere ulteriori sviluppi delle teorie di unificazione di gravità quantistica e di superstringa. [Segue al numero 123]

[1] L.A.M. – Dipartimento Scientifico e Tecnologico – Facoltà di Scienze – Università di Verona
[2] Corresponding author: disia@sci.univr.it

Natura simbolica del linguaggio della Matematica [1]

di Luciano Corso [3]

[Segue dal numero 117] In questi «appunti», così li ha chiamati l'autore, c'è tanta conoscenza matematica, ma anche tanta normale umanità.

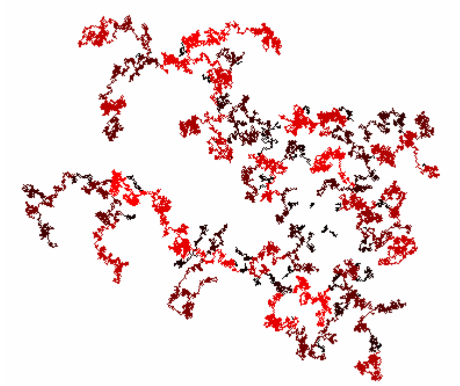
È nel tentativo di percorrere un filone nuovo del linguaggio poetico e teatrale che vanno interpretate queste composizioni e quelle mie. Per quanto mi riguarda, con *Parabole e punti* ho voluto dimostrare che il linguaggio della matematica non è arido e permette di cogliere le emozioni più profonde della vita [B.10 e 17]. Qui presento due composizioni di diverso tenore e umore, nate da due stati d'animo lontani e per ragioni diverse: *Un punto* [Tabella 8] e *Ero su una quadrica* [Tabella 9]. Il punto è l'immagine di un uomo che si muove durante la sua vita in ogni dove, secondo un moto casuale, per poi finire nel nulla. La morte di un uomo genera emozioni, la morte di un punto no. In *Ero su una quadrica* è l'incontro con una donna in un punto di sella che scatena desiderio, paura, diffidenza, azione, comprensione, amore. Queste emozioni sono espresse sempre in linguaggio matematico, come è facile capire.

Tabella 8

Un punto

Un punto si muove in ogni dove,
senza meta apparente,
non ritornando sui suoi passi.
Non si deprime mai
per non aver fatto
qualcosa di utile,
per non aver seguito
regole definite.
Un punto da quando
lo fai esistere c'è
e quando lo cancelli sparisce
e non occorre piangere.

L. Corso



Moto browniano: moto pseudocasuale di un punto (pixel) in un limitato spazio a due dimensioni di uno schermo di computer

[Segue al numero 120]

[1] Questo lavoro è stato presentato dall'autore il 18 maggio presso la sala della Gran Guardia di Verona in occasione del "**Maggio Scuola**" organizzato dal **Comune di Verona**, su invito dell'IPSIA "Enrico Fermi" di Verona e nell'ambito del tema «Fluttuando nei linguaggi». Vedere: http://www.agenziaperlascuola.it/

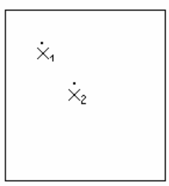
[3] Consigliere nazionale Mathesis – docente di Matematica applicata presso l'ITIS G. Marconi di VR – email: lcorso@iol.it

Limiti all'applicazione dell'assioma delle probabilità condizionate

(*di Luciano Corso*) L'assioma delle probabilità condizionate viene definito nel calcolo delle probabilità nel modo seguente: dati due eventi A e B appartenenti a una classe additiva $\mathcal{F}$ la probabilità di A condizionata da B è:

$$[P(B) \neq 0] \Rightarrow [P[A|B] = P(A \cap B)/P(B)]$$

La ragione del vincolo $P(B) \neq 0$ è evidente se si prende in considerazione il continuo. Esaminiamo il seguente esempio.



Sia F un rettangolo piano e X_1 e X_2 due punti distinti di questo rettangolo. Consideriamo ora gli insiemi $A = \{X_1\}$ e $B = \{X_1, X_2\}$ sempre appartenenti al rettangolo (si veda la figura a fianco). Allora P(A) = 0, P(B)=0, P(A∩B) = 0, ma P(A|B)=1/2. Nel continuo, insomma, l'assioma va preso con le pinze.