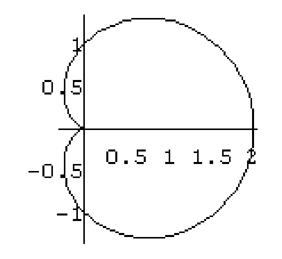
MATHESIS

Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche
Fondata nel 1895

Sezione di Verona

Redazione: Luciano Corso, Luigi Marigo, Elisabetta Capotosto – Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045)8344785 - Numero 12 - dicembre 1998



I linguaggi formali

di Ruggero Ferro*

Le cifre sono i simboli grafici 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9. Usiamo successioni finite di cifre per rappresentare i numeri grazie ad opportune convenzioni. Le cifre non sono i numeri, ma elementi di una scrittura, di un linguaggio, per parlare dei numeri. La cosa più stupefacente del linguaggio delle cifre è come certe operazioni sulle successioni di cifre (si pensi all'algoritmo della moltiplicazione che è una successione di trasformazioni di scritture secondo precise regole sugli elementi del linguaggio senza alcun riferimento al significato di tali elementi) corrispondano ad operazioni sui numeri in cui è coinvolto il significato delle scritture (continuando l'esempio avviato, si pensi alla moltiplicazione come conteggio della totalità ottenuta mettendo assieme vari gruppi ciascuno con lo stesso numero di elementi). Così le operazioni sulle cifre diventano uno strumento puramente sintattico (cioè pertinente al solo ambito della scrittura e delle trasformazioni su queste) che è un potente metodo di controllo e di esecuzione delle operazioni. Si noti come non tutti i sistemi di scrittura abbiano le stesse caratteristiche di funzionalità per un controllo sintattico e per l'esecuzione sintattica delle operazioni che si vogliono svolgere sui significati delle scritture: si pensi, ad esempio, alla difficoltà di costruire un algoritmo per la moltiplicazione con le cifre romane. Visto il grande successo dell'aritmetica che riesce a ridurre la complessità dell'esecuzione delle operazioni con procedure puramente sintattiche facilmente controllabili, e visto anche il successo del tutto analogo conseguito da Newton e da Leibniz con la costruzione del calcolo infinitesimale (anche qui regole puramente sintattiche applicate ad un opportuno linguaggio simbolico permettono di eseguire e controllare agevolmente operazioni di ricerca di tassi di variazione), è naturale domandarsi se non si possa ottenere un analogo successo in altre situazioni del sapere umano.

Per rendere questo metodo applicabile ad una qualsiasi situazione, bisognerà anzitutto cogliere cosa si può intendere in generale per situazione. Sicuramente in una certa situazione si considerano degli individui (che si possono pensare raccolti in una certa collezione da chiamarsi universo) e certe relazioni di opportuna *arietà* tra questi, relazioni che si ritengono rilevanti in quel contesto. Per essere del tutto generali non si vuole andare oltre, se non per la distinzione, tra le relazioni, di alcune con particolari caratteristiche (le funzioni totali) che permettono di indicare particolari elementi dell'universo in relazione con altri, e tra queste le funzioni 0-arie (le costanti) che permettono di indicare particolari elementi indipendentemente da altri. La richiesta poi che le funzioni siano totali (cioè applicabili ad ogni n-pla di elementi dell'universo se n è l'*arietà* della funzione) dipende dalla volontà di separare completamente dal significato la sintassi che si introdurrà sia per eseguire operazioni mediante trasformazioni di scritture che per un facile controllo delle stesse.

Così si introduce il concetto di struttura che è una quaterna ordinata (A, R, F, C) costituita da un insieme non vuoto A, detto universo, da un insieme non vuoto R di relazioni su A, ciascuna con la sua *arietà*, che non siano funzioni totali, da un insieme F di eventuali funzioni totali non 0-arie su A, e da un insieme C di eventuali funzioni 0-arie, costanti, di A. I linguaggi formali sono gli strumenti linguistici che si costruiscono per poter operare sintatticamente su strutture.

In altri interventi cercherò di chiarire le affermazioni fatte sui concetti di relazione e funzione, e di far vedere come si possano costruire dei linguaggi formali per descrivere delle strutture.

**Ruggero Ferro è Preside della Facoltà di Scienze dell'Università degli Studi di Verona e ordinario di Logica Matematica nel corso di Informatica.*

Una segnalazione che mancava!

Finalmente il Ministero della Pubblica Istruzione si è mosso. Con lettera del 20-10-1998, inviata a tutti i Provveditorati agli Studi d'Italia, scrive: «Nell'ottica di una strategia di collaborazione esterna con Enti ed Associazioni che hanno tra le loro finalità la promozione e la diffusione della cultura, questo Ministero segnala la disponibilità dell'Associazione MATHESIS a collaborare, nelle sue varie articolazioni centrale e periferiche, in iniziative rivolte alla formazione dei docenti di matematica che le S.V. o le scuole direttamente vorranno promuovere nell'ambito dei piani di aggiornamento provinciali. La MATHESIS è un'associazione di insegnanti di matematica di scuola secondaria la cui finalità è il miglioramento della qualità della didattica di tale disciplina e quindi la formazione degli stessi docenti. A tale scopo promuove annualmente un convegno didattico, cura la pubblicazione di una apposita rivista e realizza numerosi seminari di formazione rivolti a docenti della scuola. Si segnala la disponibilità dell'Associazione per quanto di competenza della S.V.». La firma è del direttore generale.

Speriamo che le attività della Mathesis siano rese più facili.

Umanesimo e Scienza

di Arnaldo Vicentini

Nessuno che si occupi di argomenti scientifici nega l'umanesimo delle lettere e delle arti. È quasi, però, un luogo comune il viceversa. Non fece scandalo quell'insegnante che portò la figura di *ingegnere* come esempio di "imbecille tecnologico": persona, secondo lui, gretta perché priva di *scienza umana*. È difficile essere onniscienti; ed è necessario che l'intellettuale sia specializzato. Ciò non giustifica l'ignoranza crassa, il disprezzo e l'esclusione dall'*umanesimo* di ciò che non si conosce o non si è in grado di capire. Ed ora riflettiamo su questo fatto: le voci della lingua comune tratte dalla matematica o dalle scienze vengono usate con accezione sbagliata rispetto a quella originaria. "Incommensurabile" ha significato relativo ad altra grandezza omogenea: ma chi vuole stupire usa la parola con accezione assoluta di «enorme». Il "minimo comune denominatore" è dato dall'unione delle fattorizzazioni di più denominatori: ma nella lingua dei giornalisti rappresenta l'intersezione degli insiemi di richieste di più persone. "Magnetico" denota un ben preciso aspetto fisico del reale misurabile: ma nei discorsi dei superstiziosi si riferisce a qualcosa di impreciso e misterioso (fluido magnetico emanato dai talismani, amuleti, guaritori, pranoterapisti). Non si è troppo maligni a spiegare così il fenomeno: la lingua non è dominata dagli intellettuali, ma dai cosiddetti intellettuali; qualcuno di costoro, per darsi importanza, ha abusato un giorno d'un vocabolo dotto andandolo a pescare tra concetti mal compresi delle reminiscenze scolastiche, facendo breccia su un uditorio altrettanto cosiddetto intellettuale.

L'umanesimo è *ars gratia artis*: è il gustare, il coltivare, l'approfondire conoscenze per se stesse. Se poi alcune di queste sono anche utili – penso alla matematica – tanto meglio. Ma nelle intenzioni, ogni scienza umana è autonoma.

Tant'è che sono rare le scoperte scientifiche sviluppate *ad hoc*, per utilità: quasi sempre l'utilizzo della scienza è una ricaduta di ciò che è già storico (si pensi, alla geometria greca, al calcolo differenziale ed integrale, a Gödel e Turing, ecc.). Ho letto un giorno sulle Scienze (*Scientific American*) che si è scoperto che il vero autore d'un trattato di matematica attribuito per secoli ad un certo frate, è Piero della Francesca. L'umanesimo di Leonardo è inseparabile dalla sua capacità di osservazione critica (come quando invita a considerare l'onda che una folata di vento produce sulla messe matura; l'onda attraversa il campo ma la messe non si sposta: si piega e si rialza). E dunque io trovo nella matematica, nelle scienze, nell'informatica e persino nella tecnica, un umanesimo profondo: il piacere di conoscere, la perfezione della logica, la bellezza di un algoritmo risolutore, la funzionalità d'un ritrovato sviluppato con serrata critica di processi matematici (si pensi ai CD, ad una videocassetta, ecc.). Pazienza se i più fra gli intellettuali non sanno cosa sia una serie di funzioni, che Leibniz più che un filosofo è stato un matematico e chi fu Peano: ma non è tollerabile che costoro considerino umanisti se stessi e ad un tempo neghino l'umanesimo di chi riconosce il fascino della serie esponenziale, l'acume della nozione di derivata e la potenza logica del metodo di induzione.

Avviso: «L'albero delle terne pitagoriche primitive», pubblicato sul Periodico di Matematiche Serie VII, Volume 5, Numero 2-3, aprile-settembre 1998 ha errori di stampa. Rivolgersi alla redazione per il testo corretto. (A. V.)

Ancora sul posto davanti libero, al cinema

di Alberto Guerrini

Sul numero 11 del presente foglio viene riportata una soluzione del problema riguardante la determinazione della probabilità che uno spettatore occupi, sedendo a caso in uno dei posti liberi al cinema, un posto con il posto immediatamente davanti a lui libero. La soluzione proposta da Arnaldo Vicentini è esatta, ma non è chiara la logica probabilistica che ha portato alla formula proposta. Usando gli stessi simboli dell'articolo di Vicentini, mi propongo di dare una possibile giustificazione a questa parte dell'articolo. Pongo f=numero di file; *p*= numero dei posti per fila; *s*=numero degli spettatori e premetto che la soluzione si baserà sulla definizione classica di probabilità.

Casi favorevoli: Lo spettatore considerato può scegliere un posto con un posto davanti libero in $p\cdot(f-1)$ modi (in quanto vanno esclusi i posti della prima fila) ed i rimanenti $(s-1)$ spettatori hanno $(p\cdot f-2)_{s-1}$ modi di sistemarsi nelle rimanenti $p\cdot f-2$ poltrone (in quanto una poltrona è occupata già dallo spettatore considerato e quella davanti deve rimanere libera). Pertanto per il principio fondamentale del calcolo combinatorio i casi favorevoli sono: $p\cdot(f-1)\cdot(p\cdot f-2)_{s-1}$.

Casi possibili: Sono i modi di sistemare gli *s* spettatori nei $p\cdot f$ posti, cioè: $(p\cdot f)_s$. Applicando la definizione classica di probabilità e detto *A* l'evento considerato, risulta:

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{p\cdot(f-1)\cdot(p\cdot f-2)_{s-1}}{(p\cdot f)_s}=\frac{f-1}{f}\cdot\frac{p\cdot f-s}{p\cdot f-1}.$$

La soluzione è uguale a quella trovata da Vicentini, ma il metodo probabilistico usato è più controllabile.

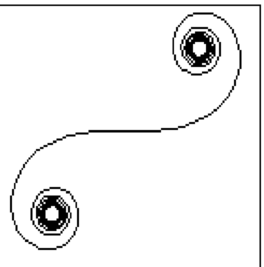
La clotoide di Eulero

Il nome deriva da Cloto, delle tre Parche, quella che filava lo stame della vita. Il nome è stato dato da E. Cesàro, matematico napoletano, agli inizi del XX secolo. Le equazioni parametriche (integrali di Fresnel) sono.

$$x=\int_0^u cos\left(\pi\cdot t^2/2\right)\cdot dt$$

$$y=\int_0^u sin\left(\pi\cdot t^2/2\right)\cdot dt\ ;$$

si varia *u* nell'intervallo $(-2\ \pi,\ 2\ \pi)$.



Bibliografia: Luciano Cresci, *Le curve celebri*, editore Muzzio, Padova, 1998

Le stranezze delle matrici esponenziali

di Arnaldo Vicentini

Sul numero 10 (ottobre '98) di questi fogli si chiedeva di provare che:

$$\boldsymbol{F}(x)=\begin{bmatrix}1 & -x & x\\ x & 1-x^2/2 & x^2/2\\ x & -x^2/2 & 1+x^2/2\end{bmatrix}$$

è del tipo ***F****(x)=Exp(x****A****)*, con ***A*** matrice costante (di Bashkov), e di calcolare ***A***. La prova è banale: basta verificare che $\boldsymbol{F}(x)\cdot\boldsymbol{F}(y)=\boldsymbol{F}(x+y)$. Per il calcolo di ***A***, si osservi che, come $[de^{ax}/dx\,]_{x=0}=(de^{ax}/dx)e^{-ax}=a$, così deve essere:

$$\boldsymbol{A}=\frac{d\boldsymbol{Exp}(x\cdot\boldsymbol{A})}{dx}\cdot Exp(-x\cdot\boldsymbol{A})=\left.\frac{d\boldsymbol{Exp}(x\cdot\boldsymbol{A})}{dx}\right|_{x=0}$$

Nel nostro caso è:

$$\boldsymbol{A}=\left.\frac{d\boldsymbol{F}(x)}{dx}\right|_{x=0}=\frac{d\boldsymbol{F}(x)}{dx}\cdot\boldsymbol{F}(-x)=$$

$$=\begin{bmatrix}0 & -1 & 1\\ 1 & -x & x\\ 1 & -x & x\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & x & -x\\ -x & 1-x^2/2 & x^2/2\\ -x & -x^2/2 & 1+x^2/2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Lo strano di ***F****(x)* sta nel fatto che le potenze della sua matrice di Bashkov ***A***, cioè $\boldsymbol{A}^n$, sono nulle dalla terza inclusa (Un fatto analogo è impossibile per l'esponente scalare). La serie di potenze di ***F****(x)*, benché esponenziale, si riduce a un trinomio di secondo grado in $x\cdot\boldsymbol{A}$:

$$\boldsymbol{A}^2=\begin{bmatrix}0 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{A}^3=\begin{bmatrix}0 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix};$$

$$e^{x\cdot\boldsymbol{A}}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}+x\cdot\begin{bmatrix}0 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}+\frac{x^2}{2}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}=\boldsymbol{F}(x).$$

Da dove viene ***F****(x)*? Salta fuori nella ricerca della ragione di progressioni geometriche di terne pitagoriche (TP) con differenza *d* costante tra ipotenusa e cateto maggiore, cioè interi positivi *[a, b, c]* con $a<b<c$, $a^2+b^2=c^2$ e $c\cdot b=d=costante$. Sia ***t*** una TP e $\boldsymbol{F}^T$ la trasposta di ***F***. Per ***t****=[3, 4, 5]* si trova $\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{F}^T(2)=[5, 12, 13]$; per ***t****=[6, 8, 10]* si *trova* $\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{F}^T(1)[8, 15, 17]$. La successione di TP $\{[3, 4, 5]\cdot\boldsymbol{F}^T(2n)\}$ – progressione geometrica di ragione $\boldsymbol{F}^T(2)$ – è tutta con *d=1*; e $\{[6, 8, 10]\cdot\boldsymbol{F}^T(n)\}$, di ragione $\boldsymbol{F}^T(1)$, con *d=2*.

Ci sono altre interessanti curiosità nelle matrici di Bashkov. Per esempio, la matrice che rappresenta la rotazione di un angolo φ attorno all'origine del piano cartesiano è del tipo $\boldsymbol{R}(\varphi)=\boldsymbol{Exp}(\varphi\cdot\boldsymbol{J})$, dove:

$$\boldsymbol{R}(\varphi)=\begin{bmatrix}cos(\varphi) & -sen(x)\\ sen(\varphi) & cos(\varphi)\end{bmatrix};\qquad \boldsymbol{J}=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}.$$

$\boldsymbol{R}(\varphi)$ opera sul vettore $[x,y]^T$ come opera $e^{i\varphi}$ sul numero complesso $x+i\cdot y$ nel piano di Gauss. Perciò ***J***, matrice di Bashkov di ***R***, si comporta come l'unità immaginaria *i* nel senso che risulta $\boldsymbol{J}^n=\boldsymbol{J}^{(n\ mod\ 4)}$ e in particolare, detta ***I*** la matrice identità: $\boldsymbol{J}=Exp[(\pi/2)\cdot\boldsymbol{J}]$; $\boldsymbol{J}^2=-\boldsymbol{I}$; $\boldsymbol{J}^3=-\boldsymbol{J}$; $\boldsymbol{J}^4=\boldsymbol{I}$;… (alla stregua di $i=Exp(i\cdot\pi/2)$; $i^2=1$; $i^3=-i$; $i^4=1$).

Anche se abbiamo ricevuto una triste notizia - la morte del prof. Francesco Speranza - la redazione augura un felice 1999 a tutti.