MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore: Luciano Corso - Redazione: Luciano Corso, Elisabetta Capotosto, Carla Benaglia - Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – 338 6416432
e-mail: lcorso@iol.it – Stampa in proprio - Numero 123 – gennaio 2008

Gauss-Riemann: la confutazione dello spazio kantiano

di Luciano Corso

[*Segue dal numero* 122] Nacquero così le geometrie non euclidee: la geometria ellittica (Bolyai) e quella iperbolica (Lobačevskij). Le geometrie non euclidee, misero in crisi l'oggettività della categoria kantiana di spazio. Gauss non volle mai mettersi a disquisire sulla questione – si suppone perché era una figura di matematico molto nota, un riferimento per tutti, e la messa in crisi della geometria euclidea poteva rappresentare una debolezza della matematica, con effetti negativi anche per il suo lavoro – ma in un passaggio delle sue riflessioni ebbe a scrivere:" *I filosofi quando dicono verità, allora sono banalità e quando dicono cose non banali, allora sono falsità*". Non è ben chiaro se questa affermazione di Gauss fosse riferita al pensiero di Kant (sullo spazio) o ai pensatori kantiani del tempo. Sta di fatto che Gauss nutrì sempre molto sospetto riguardo alle argomentazioni dei filosofi. Anche Lobačevskij non condivise il concetto di spazio kantiano per le stesse ragioni di Gauss.

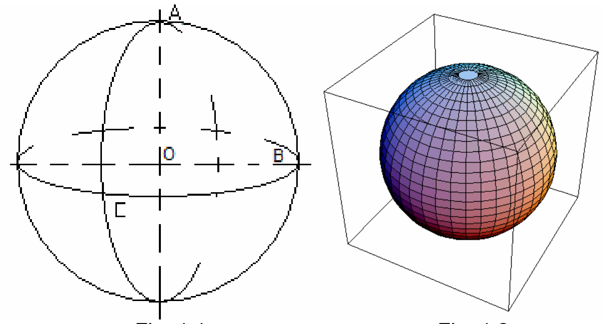

Fig. 1.1 Fig. 1.2

Fig. 1. 1) Il triangolo ABC sulla sfera ha la somma degli angoli interni pari a 270°. Così, tutti i triangoli sferici i cui lati sono archi di circonferenze nate dall'intersezione di piani passanti per il centro O con la sfera, hanno la somma degli angoli interni maggiore di 180°. Le circonferenze nate in questo modo si dicono geodetiche e sono equivalenti alle rette euclidee nel piano in quanto descrivono percorsi a minima distanza tra ogni coppia di punti sulla sfera. Queste linee curve perdono la caratteristica del parallelismo, nel senso che sulla sfera non esistono "geodetiche parallele". Nella figura 1.2 sono stati tracciati i paralleli. Essi rappresentano circonferenze che non sono "rette" in quanto dati due punti qualsiasi su di un parallelo arbitrario, il percorso a minima distanza che li unisce non corrisponde all'arco di parallelo che li unisce, ma all'arco di circonferenza che li unisce nascente, come detto, dall'intersezione di un piano passante dall'origine O con la sfera. Quando la superficie ha una curvatura che genera triangoli con somma degli angoli interni maggiore di 180°, essa ha curvatura positiva. Se, invece, come nel caso di un iperboloide con punti di sella, la superficie genera triangoli con angoli interni la cui somma è minore di 180°, allora la curvatura della superficie è negativa. Per una interpretazione corretta del concetto di curvatura di una superficie e dei suoi segni suggerisco [B.7].

Il colpo di grazia all'idea di spazio come categoria kantiana lo diede Bernhard Riemann. Egli, in una dissertazione pubblica del 1854 con supervisione fatta da Gauss in persona, dimostrò che occorre distinguere tra spazio e geometria. L'oggetto di studio è lo spazio; le regole per mezzo delle quali lo si studia fanno parte della geometria. La geometria diventa così una struttura matematica coerente che decidiamo di accettare quale strumento per lo studio dello spazio e lo spazio è un insieme di punti cui la geometria attribuisce determinate proprietà. Quanto più c'è corrispondenza tra l'oggetto di studio (lo spazio) e le regole che si applicano per studiarlo (la geometria), tanto più quadrano i conti e l'interpretazione di quanto si osserva.

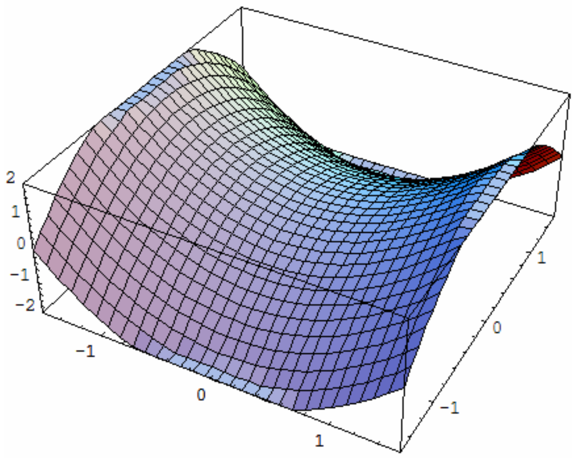

Fig. 2. La superficie curva (tratto di quadrica) tracciata nel presente grafico ha, nel punto di sella, una curvatura negativa. Qui se si disegna un triangolo con geodetiche conformi alle proprietà di questo spazio, si scopre che la somma degli angoli interni di esso è minore di 180°.

Da Euclide a Riemann passarono più di 2000 anni di storia e da Riemann in poi la geometria non fu più la stessa. Per rendersene conto basta presentare come, oggi, in topologia, si definisce il concetto di spazio e di spazio topologico, idee allora ancora non ben definite. Per spazio si intende un insieme non vuoto di oggetti geometrici cui noi assegniamo date proprietà (vettoriali, metriche, topologiche ecc.). Ecco poi la definizione di spazio topologico: Sia X un insieme non vuoto. Una classe $\boldsymbol{T}$ di sottoinsiemi di X è una topologia su X se e solo se $\boldsymbol{T}$ soddisfa i seguenti assiomi:

1) $X \in \boldsymbol{T}$ e $\varnothing \in \boldsymbol{T}$
2) $(S \subseteq \boldsymbol{T}) \Rightarrow (\cup S \in \boldsymbol{T})$
3) $(U, V \in \boldsymbol{T}) \Rightarrow (U \cap V \in \boldsymbol{T})$.

Cenno sulla curvatura di una superficie in un punto

Data una superficie σ e un punto P su di essa, tracciamo il piano τ tangente a σ in P. Tracciamo quindi la retta ortogonale ρ al piano τ. Per questa retta passa il fascio di piani φ ortogonali a τ e con $P \in \varphi$. Per ognuno di questi piani abbiamo una sezione normale di σ per P e un cerchio osculatore della curva che origina dall'intersezione di ogni piano di φ con la superficie σ.

Si definisce cerchio osculatore di una curva piana in un punto P, il cerchio che meglio approssima la curva in un opportuno intorno di P. Qui, per migliore approssimazione puntuale si intende che sia la curva sia il cerchio, in quel punto, hanno uguali derivate prima e seconda.

La curvatura di tale curva è data, per definizione, da $k = 1 / r$, ove r è il raggio di curvatura del cerchio osculatore. Al fascio di piani φ, corrisponde un fascio di cerchi osculatori, ciascuno con diverso raggio di curvatura, in generale. A questo punto si prende il cerchio osculatore di raggio mi-nimo r_{min} e quello di raggio massimo r_{max}. Si definisce curvatura di σ nel punto P il prodotto dei reciproci di questi due raggi. Cioè:

$k = (1/r_{\min}) \cdot (1/r_{\max})$.

I due raggi possono avere associati segni positivi o negativi. Se i due raggi hanno lo stesso segno (negativo o positivo che sia), allora la curvatura di σ è positiva; altrimenti essa è negativa. Il segno dei raggi dei cerchi osculatori lo dà l'orientamento della concavità della curva rispetto al vettore unitario $\boldsymbol{u}$ con origine in P e giacente sulla retta ρ ortogonale al piano tangente τ. Se la concavità della curva è nel verso di $\boldsymbol{u}$, allora la curvatura è positiva; se, al contrario, la concavità della curva è nel verso opposto a quello di $\boldsymbol{u}$, allora la curvatura è negativa. Esempio: La sfera in un punto generico P ha curvatura costante e positiva. I raggi dei cerchi osculatori sono uguali: $r_{min} = r_{max}$. In P, $\boldsymbol{u}$ associa due cerchi osculatori con raggi opposti al verso di $\boldsymbol{u}$ rispetto al piano τ e quindi le due curve hanno concavità verso il basso (quindi negativa). Il prodotto di due quantità negative è positivo. Se, invece, siamo in un punto di sella P di un iperboloide, allora le due curve, con cerchi osculatori minimo e massimo, hanno concavità opposte [una nel verso di $\boldsymbol{u}$ (positiva) e l'altra nel verso contrario (negativa)], e perciò la curvatura di σ è negativa.

Bibliografia: [B.1] Donal O'Shea (2007), *La congettura di Poincaré*, Rizzoli, Milano; [B.2] S. Lipschutz (1979), *Topologia*, Etas Libri, Milano; [B.3] M. Zamansky (1976), *Introduzione all'algebra e all'analisi moderna*, Feltrinelli, Milano; [B.4] B. Russell (1961), *La saggezza dell'Occidente*, Longanesi & C., Milano; [B.5] I. Kant (2004), *Critica della ragion pura*, Bompiani, Milano; [B.6] Euclide (2007), *Tutte le opere*, Bompiani, Milano (solo per quanto riguarda i 5 postulati degli "Elementi"); [B.7] Franco Nuzzi (2007), *Storia e analisi del concetto di curvatura,* Progedit snc, Bari: *in questo testo si trova una bella sintesi matematica e storica del concetto di curvatura.*

Buchi neri, informazione, computazione a scale ultramicroscopiche

di Paolo Di Sia ([1,2]), Valerio Dallacasa ([1])

Computazione di un buco nero [*Segue dal n.* 119]

Nessuna informazione può uscire da un buco nero **classico**. La descrizione **quantomeccanica** di un buco nero risulta invece diversa. In primo luogo sembra che i buchi neri non siano del tutto neri. Essi, infatti, irradiano alla temperatura di Hawking. Inoltre la ben conosciuta dichiarazione che "da una certa distanza tutti i buchi neri con una certa carica e momento angolare «guardano» sostanzialmente allo stesso modo" sembra attualmente non essere sempre vera. Infine, lavori recenti in teoria delle superstringhe suggeriscono che i buchi neri non distruggano realmente l'informazione su come si sono formati; sembra venga emessa l'informazione elaborata come parte della radiazione di Hawking mentre evapora. Quello che è dentro esce, ma in una forma alterata. Allora i buchi neri potrebbero in linea di principio essere "programmati": si crea un buco nero le cui condizioni iniziali codificano l'informazione da elaborare, facendo elaborare tale informazione dalla dinamica planckiana all'orizzonte del buco nero. La risposta si otterrebbe esaminando le correlazioni nella radiazione di Hawking emessa quando il buco nero evapora. Nonostante la nostra scarsità di conoscenza dei dettagli precisi circa la formazione ed evaporazione di un buco nero (una descrizione completa deve attendere gli ulteriori sviluppi delle teorie unificate), è comunque possibile fornire una stima approssimata sull'elaborazione di tale informazione.

Utilizzando i risultati di Page, uno dei primi a fornire studi dettagliati sul meccanismo di evaporazione dei buchi neri, possiamo scrivere una formula riguardante il tempo che un buco nero impiega ad evaporare:

$$t_{evap.} = \left(G^2 m^3\right) / \left(3 C \hbar c^4\right) \qquad (9)$$

dove C indica una costante dipendente dal numero di specie di particelle con massa minore di $K_B T$, con K_B costante di Boltzmann e T temperatura del buco nero. Nell'intervallo $[10,100]$ di tali specie, C risulta dell'ordine di 10^{-3}-10^{-2} e conduce ad un tempo di vita per un buco nero di $1\ Kg$ di circa $10^{-19}\ sec$, durante il quale il buco nero può trattare circa 10^{32} operazioni sui suoi circa $10^{16}\ bit$. Il numero effettivo di particelle senza massa a $T_{Hawking}$ per un buco nero di $1\ Kg$ è presumibilmente da considerarsi superiore a 100; tale numero si può ragionevolmente ritenere un limite superiore sul numero di operazioni precedentemente indicato che possono essere trattate da un buco nero. Il raggio di Schwarzschild di un computer di $1\ Kg$ risulta essere:

$$R_S = 2 G m / c^2 = 1{,}485 \cdot 10^{-27}\ m \qquad (10)$$

In considerazione a ciò, è possibile valutare la quantità di informazione immagazzinabile in un buco nero mediante la relazione:

$$I = \left(4 \pi G m^2\right) / \left(\hbar c \ln(2)\right) \qquad (11)$$

Per un computer di $1\ Kg$ nel limite di buco nero, la (11) porta al valore:

$$I = 3{,}827 \cdot 10^{16}\ bit \qquad (12)$$

Tale dato permette di ricavare il numero di operazioni al secondo dello stesso:

$$N = 5{,}426 \cdot 10^{50}\ operaz./sec \qquad (13)$$

Bibliografia:[B.1] J. D. Bekenstein, *Buchi neri, comunicazione, energia,* Di Renzo Editore, Roma, 2001; [B.2] P. Davies, *I misteri del tempo,* Mondatori, Milano, 1995; [B.3] S. Hawking, *Dal Big Bang ai buchi neri,* Rizzoli, Torino, 1988; [B.4] C. V. Johnson, *D-branes,* Cambridge University Press, Cambridge, 2003 (Testo tecnico, impegnativo); [B.5] R. Wald, *Quantum Field Theory in curved Spacetime and Black Hole Entropy*, University of Chicago Press, Chicago, 1994 (Testo tecnico, impegnativo); [B.6] S. Weinberg, *I primi tre minuti,* Mondatori, Milano, 1990; [B.7] B. Zwiebach, *A First Course in String Theory, Cambridge* University Press, Cambridge, 2004 (Testo tecnico, impegnativo)

[1] L.A.M. – Dipartimento Scientifico e Tecnologico – Facoltà di Scienze – Università di Verona
[2] *Corresponding author*: paolo.disia@univr.it

Dieci anni di vita!

(*di Carla Benaglia*) Ricorre quest'anno il decimo anniversario di vita di MatematicaMente. La rivista, infatti, è nata nel febbraio del 1998 con un primo numero doppio (gennaio-febbraio) e con l'intestazione MATHESIS VR. Nel marzo del 1999 la testata venne registrata presso il Tribunale di Verona con il nome di «MatematicaMente», di proprietà della sezione di Verona della Mathesis. Fu Luciano Corso, il nostro presidente di sezione, a volere fermamente la nascita di questa rivista e a sostenerla con impegno e determinazione. L'idea originaria era di far nascere una rivista agile, stimolante, determinata nell'affrontare i vari temi, senza fronzoli, che portasse ai lettori spunti critici nuovi e personali sugli argomenti della matematica pura e applicata, senza timore reverenziale verso chicchessia. Trovò allora, nel compianto Luigi Marigo, un aiuto forte e convinto. Egli si prodigò con Corso e con pochi altri - tra i quali il prof. Ruggero Ferro, docente di Logica Matematica e allora preside della Facoltà di Scienze MM.FF. NN. della nostra Università - affinché la qualità degli articoli fosse buona e, contemporaneamente, la rivista fosse leggibile. Con pochi mezzi siamo riusciti, grazie alle numerose e valide collaborazioni a mantenere la rivista e a diffonderla in tutta Italia. Segue l'elenco di tutti i collaboratori che con i loro spunti critici e i loro contributi hanno reso la testata gradita e apprezzata. Così, intendiamo rendere omaggio e merito a chi ha collaborato gratuitamente alla realizzazione di questo foglio mensile fino a questo momento:

Allievi Paolo di Roma; Arcangeloni Ivano di Forlì; Barozzi Giulio Cesare di Bologna, Benaglia Carla di Verona; Bernardi Claudio di Roma, Bovo Paola di Roma; Breoni Giuliana di Verona; Bronzino Innocenzo di Legnago (VR); Capotosto Elisabetta di Verona; Castelli Fabio di Verona; Cerasoli Mauro de L'Aquila, Cerritelli Luigi di Brescia; Corso Luciano di Verona; Di Sia Paolo di Verona; Emaldi Maurizio di Verona; Ferro Ruggero di Padova; Gambarelli Gianfranco di Bergamo; Gibertoni Barca Francesco di Mantova, Guerrini Alberto di Verona; Landra Luigi di Seregno (MI); Leuzzi Tullio di Bergamo; Magnarelli Nazario di Latina; Mantuano Marco di Latina; Maracchia Silvio di Roma; Marigo Luigi di Verona; Masedu Francesco de L'Aquila, Mele Francesco di Napoli; Minei Giovanni di Napoli; Munaretto Giovanni di Vicenza; Nuzzi Franzo di Bari; Pezzo Gianfranco di Verona; Plazzi Piero di Bologna; Pistori Sandro di Verona, Roncalli Amelia di Bergamo; Sala Nicoletta di Verbania; Sintini Carlo di Latina; Trotta Alberto di Anzio-Nettuno; Tulipani Sauro di Perugia; Veronesi Carlo di Rodigo (MN); Vicentini Arnaldo di Verona; Zamboni Vincenzo di Verona, Zontini Gianpaolo di Rovereto (TN), Zuccher Simone di Verona.

Sono tutti o professionisti o cultori di questa disciplina, volontari e appassionati. Abbiamo potuto fare un buon prodotto grazie a loro.