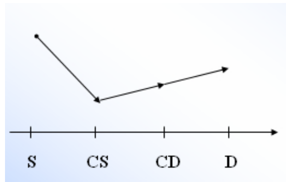
MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore: Luciano Corso - Redazione: Luciano Corso, Elisabetta Capotosto, Carla Benaglia - Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – 338 6416432
e-mail: lcorso@iol.it – Stampa in proprio - Numero 124 – febbraio 2008



La possibilità della democrazia

di Maria Cristina Miglionico [1] e Massimo Squillante [2]

1. Il problema delle scelte collettive ed il paradosso di Condorcet.

Il problema dell'individuazione di un sistema elettorale rispondente ad esigenze di razionalità e rappresentatività data almeno al secolo diciottesimo, quando il crollo dell'*ancien régime* lo pose in termini perentori. Fu in particolare il marchese di Condorcet, uno degli uomini più brillanti dell'illuminismo francese, ad individuare in maniera precisa uno dei nodi del problema. Il marchese di Condorcet fu contemporaneamente uomo di scienza e di impegno sociale; contribuì all'avanzamento dell'analisi del trattamento dell'incertezza, con il suo *Probabilité*, e fu tra i protagonisti della rivoluzione francese, prima di cadere in disgrazia durante il periodo del Terrore. Fu inoltre tra i più avanzati sul terreno dei diritti civili, come testimoniano le sue posizioni sul ruolo delle donne, molto più moderne rispetto a quelle di altri famosi esponenti del pensiero illuminista, e come fu messo in giusta evidenza da una lucida interprete delle questioni di genere, come Joyce Lussu.

Un problema di scelte collettive può essere posto nei seguenti termini: con $\{D_1, ..., D_i, \dots, D_n\}$ indichiamo un insieme di n decisori; con $X = \{A, B, C, \dots\}$ l'insieme delle alternative tra cui i decisori devono scegliere, con $\succsim_i$ un ordinamento debole su X, corrispondente al modo in cui ciascun D_i dispone le diverse alternative; con $\succsim_g$ un ordinamento debole su X, corrispondente al modo in cui il gruppo accetta che si dispongano le alternative stesse.
Si pone quindi la questione di individuare una regola razionale e coerente $C : (\succsim_1, \dots, \succsim_i, \dots, \succsim_n) \to \succsim_g$ che faccia corrispondere alle n-ple di ordinamenti corrispondenti alle preferenze espresse dai singoli decisori, un unico ordinamento corrispondente alle scelte condivise da tutto il gruppo. Naturalmente ci si aspetta che tale regola soddisfi delle proprietà formali minimali che corrispondono alle esigenze di razionalità e rappresentatività cui accennavamo all'inizio.

Quando iniziò, nel vivo delle vicissitudini storiche legate alla Rivoluzione Francese, il dibattito sui problemi di rappresentatività ed, in particolare sull'individuazione di un sistema elettorale ottimale, l'attenzione fu posta, in modo naturale, sul sistema di votazione a maggioranza; la regola della maggioranza viene, naturalmente, descritta dall'implicazione $a \succsim_i b$ per la maggioranza del gruppo $\Rightarrow a \succsim_g b$.
Merito di Condorcet fu di mostrare con un esempio come in certe condizioni tale sistema conducesse a situazioni contraddittorie. L'esempio era così costruito: consideriamo un gruppo di tre decisori, a, b e c posti di fronte a tre alternative x, y e z; supponiamo che il profilo delle preferenze di tre individui abbia la seguente struttura:

$$x \succ_a y \succ_a z$$
$$y \succ_b z \succ_b x$$
$$z \succ_c x \succ_c y$$

Applicando la regola della maggioranza, per il gruppo risulta: x è preferito a y; y è preferito a z, z è preferito a x. Quindi la procedura di voto genera una terna ciclica, vale a dire una terna che non rispetta la proprietà transitiva.

Un modo possibile per uscire da questa situazione non desiderabile è fornito dalla votazione ad agenda che consiste nell'applicare la regola della maggioranza confrontando le alternative a coppie e selezionando di volta in volta quella indicata dalla maggioranza. Questa procedura non genera terne cicliche, ma presenta un altro inconveniente: manipolando opportunamente l'agenda, cioè il modo in cui si effettuano i confronti tra le diverse alternative, si può favorire una scelta rispetto alle altre; infatti, nel caso in esame, se l'agenda prevede che si voti dapprima tra x e z, al primo turno, z prevale e x è eliminato; quindi si vota tra z e y ed y sarà preferito; in generale, sarà sempre preferita l'alternativa che viene considerata per ultima nell'agenda.

2. La barriera dell'impossibilità

L'esempio, per certi versi sconfortante, sull'inadeguatezza della regola della maggioranza quale soluzione ottimale per tutti i problemi di scelte collettive, ha stimolato l'indagine sui diversi sistemi possibili di costruzione delle scelte di gruppo; i risultati più interessanti sono stati ottenuti quando si è posta la questione in termini assolutamente generali, uscendo dalle strettoie delle proposte legate alla particolarità di un problema ed alla specificità di una singola regola.

In questo senso un risultato cruciale è stato fornito da Kenneth May (1952), ottenendo una caratterizzazione della regola di maggioranza semplice. May definisce una funzione di decisione di gruppo $D = f(D_1, D_2, ..., D_n)$, dove n è il numero di individui della comunità. Ogni D_i assume il valore 1, 0, -1 se, per una certa coppia di alternative $x, y,$ si verifica rispettivamente: $x \succsim_i y$, $x \sim_i y$, $y \succ_i x$ (cioè il decisore i-mo preferisce x debolmente a y, è indifferente tra x ed y, preferisce strettamente y a x). Dunque le D_i fungono da scrutini, cioè servono a contare le preferenze espresse tra le alternative, e la f è una regola di aggregazione per determinare la proposta vincente. La funzione f somma le D_i, assegnando a D un valore in base alla seguente regola:

$$\sum_{i=1}^{n} D_i > 0 \to D = 1$$

$$\sum_{i=1}^{n} D_i = 0 \to D = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} D_i < 0 \to D = -1$$

May ha provato che una funzione di decisione di gruppo corrisponde alla regola della maggioranza semplice se e solo se soddisfa le quattro seguenti condizioni:

- *decisività*: la funzione di decisione del gruppo è definita per ogni insieme di ordinamenti delle preferenze.
- *anonimato*: D è determinato solo dai valori dei D_i. Qualunque permutazione degli scrutini lascia perciò D invariato.
- *sensibilità positiva*: se D è uguale a 0 o ad 1 ed un individuo cambia il suo voto da –1 a 0, o da 0 a 1, mentre tutti gli altri voti restano invariati, D =1.
- *neutralità*: se x sconfigge (o pareggia con) y per una serie di preferenze individuali, e tutti hanno la stessa classificazione ordinale per z e w così come per x ed y, allora z sconfigge (o pareggia con) w.

È stato Kenneth J. Arrow, successivamente, a dare risposta al quesito che implicitamente il paradosso di Condorcet aveva posto: è possibile individuare una regola per l'individuazione delle decisioni di gruppo, da lui denominata costituzio-

ne, che rispetti presupposti minimali di razionalità e di rappresentatività, tradotti in opportuni assiomi che la regola deve rispettare?
La risposta, negativa, è data dal teorema:
Teorema di impossibilità (Kenneth J. Arrow) Non esiste alcuna costituzione che consenta di definire $\succsim_g$, a partire dagli ordinamenti individuali $\succsim_1$, … , $\succsim_n$ in modo che siano verificati gli assiomi 1-6 che seguono:

Assioma 1. *Ordinamento debole*
Sono definite per ogni individuo i e per il gruppo g le relazioni di preferenza debole $\precsim_i$, indifferenza $\sim_i$, preferenza stretta $\succ_i$, verificanti le proprietà:

$\forall a,b \quad a \precsim_i b$ o $b \precsim_i a$	(completezza)
$\forall a,b,c \quad a \precsim_i b \, , \, b \precsim_i c \;\Rightarrow\; a \precsim_i c$	(transitività)
$\forall a,b \quad a \sim_i b \Leftrightarrow a \precsim_i b$ e $b \precsim_i a$	(consistenza dell'indifferenza e della preferenza debole)
$\forall a,b \quad a \succ_i b \;\Leftrightarrow\;$ *non è vero che* $b \succsim_i a$	(consistenza della preferenza stretta e debole)

Assioma 2. *Non banalità*
- Esistono almeno due membri del gruppo
- Esistono almeno tre alternative

Assioma 3. *Dominio universale*
$\succsim_g$ è definito per ogni possibile scelta di profili individuali
$\succsim_1$, … , $\succsim_n$.

Assioma 4. *Rilevanza binaria* (*Indipendenza dalle alternative irrilevanti*)
Supponiamo che $\succsim_i$ e $\succsim_i'$ siano identici su $\{a, b\}$:
$a \succsim_i b \Leftrightarrow a \succsim'_i b$
$b \succsim_i a \Leftrightarrow b \succsim'_i a \;\; \forall i$
allora
$a \succsim_g b \;\Leftrightarrow\; a \succsim'_g b$ e $b \succsim_g a \;\Leftrightarrow\; b \succsim'_g a$.

Assioma 5. *Principio di Pareto* (*Unanimità*)
$a \succ_i b \; \forall i=1, \ldots, n \;\Rightarrow\; a \succ_g b$

Assioma 6. *Non dittatorialità*
Nessun individuo gode di una posizione tale che, ogni qualvolta esprima una preferenza tra 2 alternative e gli altri quella opposta, la sua preferenza è preservata dall'ordinamento sociale.

A partire dal risultato, cruciale, di Kenneth Arrow, la ricerca nel campo delle scelte collettive si è sviluppata sia nella direzione dell'individuazione di condizioni che rendessero possibile l'aggiramento della barriera dell'impossibilità, sia nel senso di generalizzazioni del teorema stesso.
Una possibile via d'uscita è indicata dal teorema dovuto a D. Black ed allo stesso K. Arrow (teorema di Black-Arrow), in cui viene introdotta una restrizione della condizione di dominio universale nota come preferenze soddisfacenti l'ipotesi di unico massimo (single peaked): tale condizione esige che l'insieme delle alternative di ciascun individuo possa essere disposto, rispetto ad un fissato insieme ordinato, in modo che le preferenze di ciascun individuo risultino decrescenti, crescenti, oppure ancora crescenti fino ad un massimo e poi decrescenti.
Il risultato di possibilità che si può ottenere in corrispondenza è espresso dal seguente:
Teorema di Black-Arrow. Se il numero dei decisori è dispari e se le preferenze soddisfano l'ipotesi di unico massimo, allora la regola della maggioranza semplice soddisfa tutte le condizioni 1-6 di Arrow, tranne quella di dominio non limitato.

Le figure 1 e 2 illustrano il verificarsi o meno dell'ipotesi single-peaked per i decisori che esprimano, nel caso di elezioni politiche, le loro preferenze rispetto a candidati di sinistra (S), centro sinistra (CS), centro destra (CD), destra (D).

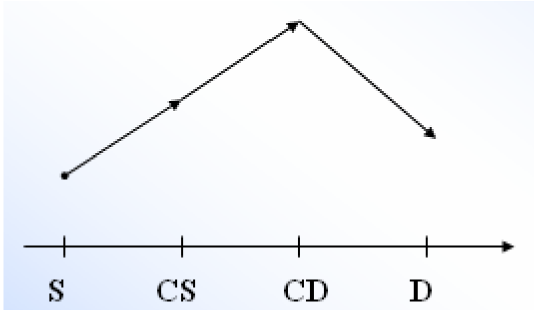


Figura 1. Preferenze che soddisfano l'ipotesi di unico massimo

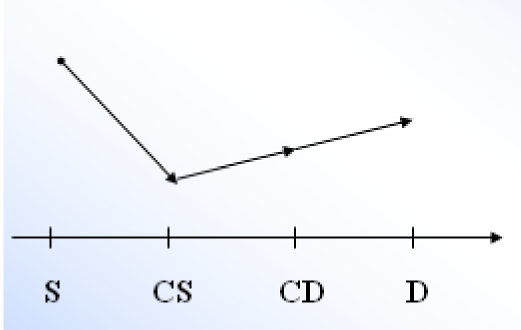


Figura 2. Preferenze che non soddisfano l'ipotesi di unico massimo

Il teorema di Black–Arrow ha avuto il merito di individuare una soluzione al problema posto dal Teorema di impossibilità, ma sono anche evidenti i limiti di tale soluzione:,
- necessità di un numero dispari di individui;
- visione del mondo, generalmente, non condivisa dai membri del gruppo di decisori e, quindi, difficoltà ad ottenere profili di preferenze del tipo single-peaked.

[*Segue al numero 125*]

[1] Seconda Università di Napoli - Dipartimento di Cultura del Progetto – email: mcristina.miglionico@unina2.it
[2] Università degli Studi del Sannio - Dipartimento di Analisi dei Sistemi Economici e Sociali – e-mail: squillan@unisannio.it

Festival della Matematica di Roma del 2008

Dal 13 al 16 marzo si è tenuto a Roma, sotto la direzione scientifica di Piergiorgio Odifreddi (docente di Logica Matematica presso l'Università degli Studi di Torino) il Festival della Matematica. Riportiamo, di seguito, un significativo passaggio delle ampie relazioni svolte in quei giorni dai numerosi studiosi, divulgatori e scienziati presenti alla manifestazione.

Il brano è tratto dalla *Lectio Magistralis di David Mumford* (Medaglia Fields). «[…] Per oltre duemila anni la logica di Aristotele ha governato il pensiero degli intellettuali occidentali. Oggi i modelli stocastici e il ragionamento probabilistico si rivelano essere più rilevanti dei modelli esatti e del ragionamento logico per la comprensione del mondo, della scienza e di molte parti della stessa matematica. Nata nei giochi d'azzardo o nelle tabelle di mortalità della Londra settecentesca, la teoria della probabilità e dell'inferenza statistica si afferma oggi come un fondamento migliore dei modelli della scienza, specialmente quelli che riguardano i processi del pensiero, oltre che "un ingrediente essenziale della matematica teorica, e degli stessi fondamenti della matematica".

Se il pensiero è l'atto di valutare la distribuzione di probabilità di eventi sconosciuti, data la somma totale della nostra conoscenza di eventi passati e del contesto presente, allora l'«oggetto mentale paradigmatico» non è una proposizione, inossidabile nella sua «eterna gloria» con il suo valore di verità, ma una variabile casuale, il cui valore è soggetto a probabilità non ancora fissate. È questo il radicale cambiamento di prospettiva che finirà per influenzare tutta la matematica di questo nuovo secolo […]».

Tratto da: http//www.auditorium.com/eventi