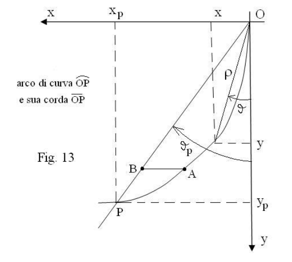
# MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore: Luciano Corso - Redazione: Luciano Corso, Elisabetta Capotosto, Carla Benaglia - Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – 338 6416432
e-mail: lcorso@iol.it – Stampa in proprio - Numero 125 – marzo 2008


# La possibilità della democrazia


di Maria Cristina Miglionico [1] e Massimo Squillante [2]



[*Segue dal numero* 124]


Ulteriori risultati di possibilità sono stati ottenuti agendo sulla condizione di razionalità collettiva, nel senso dell'indebolimento della proprietà di transitività delle relazioni di preferenza; è possibile indebolire il requisito di transitività richiedendo la quasi-transitività, vale a dire la transitività della sola preferenza stretta, o l'aciclicità (se $x_1 \gtrsim x_2$ , $x_2 \gtrsim x_3$ , …, $x_{n-1} \gtrsim x_n$ , allora non deve essere $x_n \succ x_1$). Ad esempio, date tre alternative $x$, $y$ e $z$, l'ordine di preferenza collettivo $x \gtrsim y$ , $y \gtrsim z$ , $x \sim z$, è aciclico e rispetta la transitività della relazione di preferenza debole ($x \gtrsim y$ e $y \gtrsim z$ implica $x \gtrsim z$).

Risultati significativi in questa direzione sono stati ottenuti da Amartya Sen e Allan Gibbard (che ha mostrato i limiti dell'ipotesi di transitività della sola preferenza stretta):

***<u>Teorema di possibilità (A.Sen)</u>***: Esiste una costituzione che soddisfa la transitività della sola relazione di preferenza stretta e tutte le altre ipotesi poste nel teorema di Arrow.

***<u>Teorema (A.Gibbard)</u>*** Ogni costituzione che soddisfi la transitività della relazione di preferenza sociale stretta e gli altri assiomi di Arrow genera oligarchie (cioè un gruppo di decisori capace di imporre le proprie preferenze).

C'è da segnalare, infine, che il risultato di Arrow è stato esteso al caso infinito da Alan Kirman e Dieter Sondermann (1972). Riassumiamo brevemente tale risultato: l'insieme dei decisori sia rappresentato da un intervallo reale, ad esempio l'intervallo $I = [0,1]$; per insieme socialmente decisivo si intenda un insieme di decisori $C$ tale che se gli individui di $C$ preferiscono $x$ ad $y$, tutto il gruppo di decisori I preferisce $x$ ad $y$; qualsiasi sia la regola di preferenza sociale assegnata allora vale la seguente proprietà:

***<u>Teorema</u>*** (***A.Kirman e D.Sondermann***) Per ogni ε positivo esiste un sottoinsieme socialmente decisivo $C$ di $I$ tale che $\mu(C) < \varepsilon$, dove $\mu$ è la misura di Lesbegue.

Quindi, sebbene non ci sia un singolo individuo che determina le preferenze della società, si possono individuare coalizioni arbitrariamente piccole che lo fanno.

### 3. Logiche a più valori e risultati di possibilità.

Attraverso una generalizzazione della logica classica, utilizzando cioè logiche a più valori, è possibile ottenere dei risultati di possibilità, nel senso che è possibile ottenere delle relazioni di preferenza, più generali rispetto alle relazioni binarie ordinarie, e che verificano gli assiomi di Arrow.

Un risultato di questo tipo è stato fornito da S. Ovchinikov:

***<u>Teorema di possibilità</u>***

La regola

$$C:\Re_1,\ldots,\Re_n \to \Re(a,b)=\psi\left(\frac{1}{n}\sum\nolimits_{k=1}^{n}\Re_k(a,b)\right)$$

soddisfa gli assiomi di Arrow se e solo se:

- $\psi(a) + \psi(1 - a) = 1$
- $\psi(a + b) \le \psi(a) + \psi(b)$

dove $\Re_1$, … , $\Re_n$ indicano le preferenze individuali, $\Re$, relazione fuzzy, la preferenza di gruppo, rappresentata da una funzione $\psi$ continua, strettamente crescente sull'intervallo unitario e che soddisfa le condizioni:

$\psi(0) = 0$

$\psi(1) = 1.$

Per ottenere un risultato di possibilità, si utilizza, dunque, una generalizzazione del concetto di relazione binaria: indicato con $A$ l'insieme delle alternative, una *relazione binaria fuzzy* su $A$ è un'applicazione $\Re(a, b)$ su $A\times A$ a valori in $[0,1]$ soddisfacente le seguenti proprietà:

- $\Re(a, a) = 1$ riflessività
- $\Re(a, b) + \Re(b, a) \ge 1$ completezza
- $\Re(a, b) + \Re(b, c) - 1 \le \Re(a, c)$ transitività

Dunque, per ottenere un risultato di possibilità, la sintesi delle preferenze individuali avviene, nell'ottica di Ovchinikov, mediante una relazione fuzzy; l'autore stesso interpreta questo fatto come la possibilità di modellare in maniera diversa la razionalità individuale (relazioni binarie classiche) e quella collettiva (relazioni fuzzy).

Per quanto la letteratura sulle scelte collettive e sulla problematica arroviana sia ricca, il campo presenta ancora enormi spunti di interesse, sia dal punto di vista metodologico che applicativo; in particolare sarebbe interessante approfondire l'analisi dei risultati ottenibili agendo sulle relazioni di preferenza nel senso delle generalizzazioni cui abbiamo accennato, individuando delle vie di uscita anche per altri casi di scelte sociali (caso infinito à la Kirman – Soderman, paradosso liberale di A. Sen)


**Bibliografia:** [B.1] Arrow J.K., 1951, *Social choice and individual values*, John Wiley and Sons Ltd. New York. [B.2] Basile L., Basile L., D'Apuzzo L., Squillante M., Ventre A., *Incontro con Kenneth Arrow*, La Città del Sole, Napoli, 2002. [B.3] Blair D.H., Pollak R.A., 1982, *Acyclic Collective Choice Rules*, Econometrica, vol. 50. [B.4] Blair D.H., Pollak R.A., 1983, *Scelte Collettive Razionali*, Le Scienze, n. 182. [B.5] Condorcet, Marquis de, *Essai sur L'Analyse à la Probabilité des Décisions Rendus à la Pluralité des Voix*. Paris, l'Imprimerie Royale, 1785. [B.6] Fishburn P.C., 1976, *Borda's rule, positional voting and Condorcet's simple majority principle*, Public Choice, 28. [B.7] Fishburn P.C., *Arrow's Impossibility theorem: Concise Proof and Infinite Voters*, Journal of Economic Theory, vol. II. [B.8] Gibbard A.**,** 1973, *Manipulating the Voting Scheme: a General Result*, Econometrica, 41, 587-601. [B.9] Gibbard A., 1974, *A Pareto-consistent Libertarian Claim*, Journal of Economic Theory, 6 388-410. [B.10] Gibbard A., *Arrow's theorem with a fixed feasible alternative*, Social Choice and Welfare, vol. 4. [B.11] Kirman A., Soderman, D.**,** *Arrow's theorem, many agents and invisible dictators*, Journal of economic theory, Elsevier, vol. 5(2), ,pages 267-277. [B.12] Lussu J., *Padre, padrone, padreterno,* ed. Mazzotta, 1976. [B.13] Maffettone S.**,** *Ermeneutica e scelta collettiva,* Guida editore, 1992. [B.14] Montero de Juan, 1987, *Arrow's theorem under fuzzy rationality*, Behavioral Science, vol. 32. [B.15] Mueller D.C., 1997, *La teoria delle scelte collettive II*, Idelson. [B.16] Ovchinikov S., 1991, *Social choice and Lukasiewicz logic*, Fuzzy Sets and System, 43, North Holland. [B.17] Sen A.K., 1966, *A Possibility Theorem on Majority Decisions*, Econometrica, 34, pp. 491-499. [B.18] Sen A.K., 1969, *Quasi-transitivity, Rational Choice and Collective Decisions*, Review of Economic Studies, 36, pp. 381-394. [B.19] Sen A.K., 1982, *Choice, Welfare and Measurement*, Cambridge, Mass. MIT Press. [B.20] Sen A.K., 1985, *Social choice and justice*, Journal Economic Literature. [B.21] Sen A.K., 1986, *Social choice theory*, Handbook of Mathematical Economics. [B.22] Sen A.K., 1991, *Welfare, Preference and Freedom*, Journal of Econometrics, 50 (1-2), 15-30.



[1] Seconda Università di Napoli - Dipartimento di Cultura del Progetto – email: mcristina.miglionico@unina2.it

[2] Università degli Studi del Sannio - Dipartimento di Analisi dei Sistemi Economici e Sociali – e-mail: squillan@unisannio.it

# Su due curve isocrone

di Nazario Magnarelli [*]

Un grave $P$ cade lungo una linea posta in un piano verticale. Vogliamo sapere quale forma deve avere la linea affinché, in assenza di attrito, il tempo impiegato dal grave a cadere lungo un arco qualsiasi sia uguale a quello impiegato a cadere lungo la corda dell'arco stesso (fig. 1).

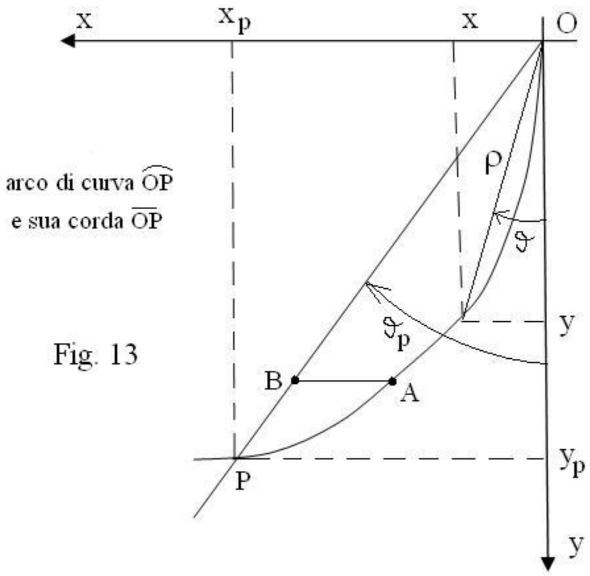



Fig. 13

**Soluzione**

Nel piano verticale del moto scegliamo l'asse $x$ orizzontale, l'asse $y$ verticale discendente e poniamo l'origine $O$ nella posizione iniziale del grave. Siano ρ e ϑ le coordinate polari del grave $P$ quando si assuma il semiasse $y$ come asse polare; l'anomalia ϑ sarà l'angolo che la corda forma con il semiasse positivo $y$.

Siano ρ e ϑ le coordinate polari del grave $P$ quando si assuma il semiasse $y$ come asse polare; l'anomalia ϑ sarà l'angolo che la corda forma con il semiasse positivo $y$. Lungo la curva, la lunghezza $ds$ di un elemento di traiettoria è:

$$ds=\sqrt{(d\rho)^2+(\rho\, d\vartheta)^2}=\sqrt{\dot\rho^2+\rho^2}\cdot d\vartheta . \qquad (1)$$

Un grave che parta da fermo dalla quota $h = 0$, quando giunge alla quota $h = \rho\cos(\vartheta)$ avrà perso l'energia potenziale $mgh$ per acquistare l'energia cinetica $m\, v^2 / 2$. La velocità $v$ del grave alla quota $h$ si ricava dall'eguaglianza:

$$m\, g\, \rho\cos(\vartheta)=\frac{1}{2}m\, v^2 , \qquad (2)$$

da cui $\quad v=\sqrt{2\, g\, \rho\cos(\vartheta)}$. $\qquad$ (3)

Il tempuscolo impiegato a percorrere il trattino $ds$ di curva è:

$$dt=ds/v=\sqrt{\frac{\dot\rho^2+\rho^2}{2\, g\, \rho\cos(\vartheta)}}\cdot d\vartheta . \qquad (4)$$

Il tempo impiegato a scendere da $O$ a $P$ lungo la curva è:

$$t_P=\frac{1}{2\, g}\int_0^{\vartheta_P}\sqrt{\frac{\dot\rho^2+\rho^2}{\rho\cos(\vartheta)}}\cdot d\vartheta \qquad (5)$$

Se invece il grave scende lungo la corda $OP$, la velocità scalare nel punto $P$ è la stessa ma il tempo si ricava dalla legge oraria:

$$\rho_P=\frac{1}{2}\, g\cos(\vartheta_P)\bar t_P^{\,2} , \qquad (6)$$

da cui

$$\bar t_P^{\,2}=2\,\rho_P/g\cos(\vartheta_P) ,$$

e quindi

$$\bar t_P=\sqrt{\frac{2}{g}}\cdot\sqrt{\frac{\rho_P}{\cos(\vartheta_P)}} . \qquad (7)$$

Se vogliamo che i tempi dati rispettivamente da (6) e (5) siano uguali, si ottiene l'equazione integro-differenziale seguente:

$$\sqrt{\frac{2}{g}}\cdot\sqrt{\frac{\rho_P}{\cos(\vartheta_P)}}=\frac{1}{\sqrt{2\, g}}\int_0^{\vartheta_P}\sqrt{\frac{\dot\rho^2+\rho^2}{\rho\cos(\vartheta_P)}}\cdot d\vartheta , \qquad (8)$$

ossia

$$2\cdot\sqrt{\frac{\rho_P}{\cos(\vartheta_P)}}=\int_0^{\vartheta_P}\sqrt{\frac{\dot\rho^2+\rho^2}{\rho\cos(\vartheta_P)}}\cdot d\vartheta .$$

Se vogliamo che le due curve siano "isocrone", cioè che questa eguaglianza valga per ogni punto $P$ di intersezione di due archi presi rispettivamente su di esse, $\vartheta_P$ si deve considerare una variabile indipendente in entrambi i membri della (8). Poiché questi sono pensati identicamente uguali, debbono essere sono uguali anche le rispettive derivate rispetto a $\vartheta_P$; derivando l'eguaglianza, e abolendo il pedice "$P$" che diventa superfluo, otteniamo:

$$\frac{2}{2}\cdot\left[\frac{\rho}{\cos(\vartheta)}\right]^{-(1/2)}\cdot\frac{d}{d\vartheta}\left(\frac{\rho(\vartheta)}{\cos(\vartheta)}\right)=\sqrt{\frac{\dot\rho^2+\rho^2}{\rho\cos(\vartheta)}} , \qquad (9)$$

e quindi

$$\sqrt{\frac{\cos(\vartheta)}{\rho}}\cdot\frac{\dot\rho\cos(\vartheta)+\rho\sin(\vartheta)}{\cos^2(\vartheta)}=\sqrt{\frac{\dot\rho^2+\rho^2}{\rho\cos(\vartheta)}} ,$$

da cui

$$\frac{\dot\rho\cos(\vartheta)+\rho\sin(\vartheta)}{\cos^2(\vartheta)}=\frac{\sqrt{\dot\rho^2+\rho^2}}{\cos(\vartheta)} ,$$

e quindi:

$$[\dot\rho\cos(\vartheta)+\rho\sin(\vartheta)]^2=\left(\dot\rho^2+\rho^2\right)\cos^2(\vartheta) .$$

Sviluppando il quadrato e semplificando si ha:

$$\dot\rho\sin(2\,\vartheta)=\rho\cos(2\,\vartheta) \ , \ \frac{d\rho}{d\vartheta}=\rho\frac{\cos(2\,\vartheta)}{\sin(2\,\vartheta)} \qquad (10)$$

Integriamo separando le variabili:

$$\int\frac{d\rho}{\rho}=\frac{1}{2}\int\frac{d(\sin(2\,\vartheta))}{\sin(2\,\vartheta)} \ , \ \ln\left(\frac{\rho}{a}\right)=\ln\sqrt{\sin(2\,\vartheta)} , \qquad (11)$$

con $a$ costante d'integrazione.
Si ricava

$$\rho=a\sqrt{2\sin(\vartheta)\cdot\cos(\vartheta)} \quad , \quad \rho^2=a\sqrt{2\cdot\rho\sin(\vartheta)\cdot\rho\cos(\vartheta)} .$$

Ricordando le formule di passaggio da coordinate polari a coordinate cartesiane, si ha

$$x^2+y^2=a\sqrt{2\, x\, y} ; \qquad (12)$$

Infine

$$(\, x^2+y^2\,)^2=2\, a^2\cdot x\, y. \qquad (13)$$

La curva è la lemniscata di Bernoulli; basta una rotazione di 45° per portarla a forma canonica.

Nota storica: *Questo problema fu proposto e risolto da T. Bonati e pubblicato in Venezia nel 1781.*

[*] Socio Mathesis di Latina. L'autore ringrazia il collega e amico Arnaldo Vicentini di Verona per gli utili spunti che gli ha dato nella realizzazione di questo lavoro.

**Bibliografia**: Bruno Finzi e Paolo Udeschini, *Esercizi di Meccanica Razionale*, Tamburini editore, 1964, Milano (pag. 390)

---

**Caos deterministico:**

Let V be a set. f: V→V is said to be chaotic on V if:

1) f has sensitive dependence on initial conditions.
2) f is topologically transitive;
3) periodic points are dense in V.

To summarize, a chaotic map possesses three ingredients: unpredictability, indecomposability, and an element of regularity.

Tratto da: Devaney R. L., An Introduction to Chaotic Dynamical Systems, Addison-Wesley Publishing Company Inc, New York, 1989, pag. 50