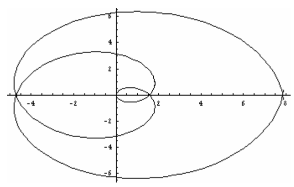
MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore: Luciano Corso - Redazione: Luciano Corso, Elisabetta Capotosto, Carla Benaglia - Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – 338 6416432
e-mail: lcorso@iol.it – Stampa in proprio - Numero 126 – aprile 2008



Omogeneità del tempo e conservazione dell'energia

di Vincenzo Zamboni [*]

A volte in fisica può sfuggire l'importanza di alcune proprietà elementari, che, per la loro apparente ovvietà, rischiano di essere trascurate. Ne sono un esempio gli assunti di omogeneità e isotropia spaziali e di omogeneità temporali: le leggi fondamentali della natura debbono essere invarianti rispetto a traslazioni e rotazioni nello spazio, così come per gli spostamenti temporali. Applicando tali concetti alla meccanica classica si ottengono importanti risultati: dall'invarianza temporale si deduce la conservazione dell'energia, mentre dalle proprietà spaziali seguono le conservazioni della quantità di moto e del momento angolare. Consideriamo la descrizione lagrangiana di un sistema isolato (nel senso più generale possibile: l'intero Universo), attraverso una funzione:

$$L = L(q_1(t), \dots , q_s(t), q_1'(t), \dots , q_s'(t), t) \qquad (1)$$

che, in virtù del principio di minima azione, obbedisce all'equazione:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial q'_j} = \frac{\partial L}{\partial q_j} \qquad (2)$$

L'invarianza temporale delle leggi dinamiche (conseguente l'omogeneità temporale) comporta che la (2) non può mutare per una trasformazione del tipo

$$t \to t + a\,, \qquad (3)$$

per cui non lo puo' neanche la (1); sicché si ottiene:

$$\partial L \,/\, \partial t = 0\,. \qquad (4)$$

Mantenendosi, comunque, la dipendenza implicita di L da t, attraverso $q(t)$ e $q\,'(t)$, si puo' derivare

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial q_j}\cdot q\,'_j + \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial q'_j}\cdot q_j'' \qquad (5)$$

(si è usata la ben nota proprietà

$$\frac{d}{dt} f\big(x(t),t\big) = \frac{\partial f}{\partial t}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t}\,,$$

nel caso in cui $\partial f \,/\, \partial t = 0$). Tramite le equazioni del moto, possiamo riscrivere la (5) come:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{j=1}^{s} q_j' \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial q_j'}\right) + \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial q'_j}\cdot q_j'' =$$

$$= \frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{s} q_j' \cdot \frac{\partial L}{\partial q_j'}$$

da cui: $$\frac{d}{dt}\left(\sum_{j=1}^{s} q_j' \cdot \frac{\partial L}{\partial q_j'} - L\right) = 0. \qquad (6)$$

Abbiamo ottenuto, dunque, l'invarianza

$$E = \sum_j q_j' \cdot \frac{\partial L}{\partial q_j'} - L \qquad (7)$$

che coincide proprio con l'energia, e si conserva, come mostra la (6).
Ricordando che la lagrangiana di un sistema isolato è

$$L = \frac{1}{2}\sum_j m_j \cdot v_j - U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n) \equiv T - U \qquad (8)$$

si mostra che l'invariante (7) è proprio l'energia del sistema. Infatti, derivando opportunamente si ha:

$$\sum_s x'_s \cdot \frac{\partial L}{\partial x'_s} - L = \sum_s v_s \cdot \frac{\partial}{\partial v_s}\left(\frac{m_s \cdot v_s^2}{2}\right) - L =$$

$$\sum_s m_s \cdot v_s^2 - L = \sum_j m_j \cdot v_j^2 - \sum_j \frac{m_j \cdot v_j^2}{2} + U =$$

$$= \sum_j \frac{m_j \cdot v_j^2}{2} + U = T + U = E_{Mecc}\,. \qquad (9)$$

L'indice s è esteso alle tre componenti di ogni particella, mentre

$$v_j^2 = v_{jx}^2 + v_{jy}^2 + v_{jz}^2\,.$$

Oltre che per i sistemi isolati, la legge di conservazione (7) vale anche se si aggiunge un campo esterno costante nel tempo (ad esempio, il campo gravitazionale terrestre, non perturbato da altri corpi). Infatti, aggiungendo il corrispondente U′, vale anche per esso:

$$\partial U' \,/\, \partial t = 0 \text{ e } \partial(L\text{-}U') \,/\, dt = 0 \qquad (10)$$

Sicché si puo' ripetere il ragionamento già svolto.
In fisica classica le proprietà citate per il tempo e lo spazio mostrano la loro importanza generando questo e gli altri due teoremi di consrvazione citati all'inizio del discorso, ciscuno indipendentemente dall'altro. Albert Einstein ha applicato simultaneamente le tre proprietà dette e la costanza della velocità elettromagnetica nel vuoto (individuata da Maxwell), deducendone matematicamente la teoria della relatività ristretta. Con ciò possiamo davvero sottolineare quanto le caratteristiche di invarianza rispetto a rototraslazioni spaziali e spostamenti temporali siano pregnanti e feconde: da proprietà apparentemente banali, si deducono importanti teoremi fondamentali sul comportamento della natura.

Bibliografia: [B.1] Landau e Lifsits (1976), *Meccanica*, Roma, Editori Riuniti; [B.2] Vladimir Arnold (1979), *Metoodi matematici della meccanica classica*, Roma, Editori Riuniti; [B.3] Robert Resnick (1976), *Introduzione alla relatività*, Milano, C.E.A.; [B.4] A. Einstein, Infeld (1948), *L'evoluzione della fisica*, Torino, Einaudi; [B.5] Morris Kline (1996), *Storia del pensiero matematico*, Torino, Einaudi

[*] Socio Mathesis di Verona

Su un problema dell'aritmetica di Diofanto

di Maurizio Emaldi [**]

L'*Aritmetica* di Diofanto di Alessandria, scritta circa nel 250 d.C., si presenta come una raccolta didattica di problemi con risoluzione sui numeri razionali positivi considerati indipendentemente da geometria e concetti di misurazione. Questi problemi richiedono numeri non evidenti, potenze dei quali – generalmente quadrati e cubi – soddisfano condizioni formulate usando l'addizione, la sottrazione, la moltiplicazione o fissando un rapporto. Questi problemi sono disposti in un ordine tale che un loro studente passa da uno più semplice a uno più complesso, senza disporre di regole di deduzione. Diofanto usa un linguaggio algebrico in cui è disponibile un simbolo per un solo numero incognito e ammette la nostra «regola dei segni».

Qui voglio parlare del problema II.1 (problema 1 del libro II) dell'*Aritmetica* nell'edizione di Th. Heath: *Diophantus of Alexandria; A study in the history of Greek Algebra* (Cambridge University Press, London 2nd ed. 1910). Questo problema, che richiede di "trovare dei numeri tali che la loro somma sia alla somma dei loro quadrati in un rapporto dato", ha una soluzione generale in numeri razionali nel pregevole libro di O. ORE: *Number Theory and its History* (Mc. Graw-Hill, 1948).

Come ogni altro problema dell'*Aritmetica* anche il problema II.1 ha un enunciato astratto e generale. L'enunciato è astratto perché esso è valido su un campo di numeri qualunque. L'enunciato è generale perché il dato – un rapporto – non ha un valore numerico speciale. Il matematico norvegese ORE interpreta il problema come un problema di aritmetica sul campo dei numeri razionali e ne trova la soluzione generale in questo campo usando il linguaggio algebrico moderno in cui sono disponibili simboli per più numeri incogniti, per costanti e per parametri. Egli traduce il problema con l'equazione:

$$\frac{x^2+y^2}{x+y}=p$$

Dove x e y sono numeri da trovare e p denota il reciproco di "un rapporto dato". ORE non dice nulla sulla natura di p e perciò io considero p come una costante intera positiva. ORE considera l'equazione come equazione di secondo grado in x e ottiene le soluzioni

$$x=\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-y^2+py} \qquad (1)$$

Poiché x e y sono numeri razionali, è necessario che y renda il radicando un quadrato. Valori di y che soddisfano questa condizione necessaria possono essere ottenuti in funzione di un parametro razionale t dall'equazione

$$\frac{p^2}{4}-y^2+p\,y=\left(\frac{p}{2}+t\,y\right)^2$$

sulla base dell'osservazione che ogni numero razionale può essere espresso nella forma $((p\,/\,2)+t\,y)$ mediante una conveniente scelta del numero razionale t. Le radici di questa equazione di secondo grado in y le otteniamo con sole operazioni razionali. Una di esse è $y=0$; l'altra è

$$y=p\,\frac{1-t}{1+t^2} \qquad (2)$$

che sostituita in (1) dà

$$x=p\frac{1+t}{1+t^2} \quad , \quad x=p\frac{t(t-1)}{1+t^2} \qquad (3)$$

Le formule (2) e (3) con t razionale danno la soluzione generale in numeri razionali el problema II.1.

Nel linguaggio algebrico di Diofanto non solo mancano simboli per trattare simultaneamente più numeri incogniti , ma mancano anche simboli per denotare costanti e parametri. Ecco perché ORE scrive " Diofanto, naturalmente, non ha formule" e può solo illustrare metodi di risoluzione dando un valore speciale alla costante p. Diofanto prende p =10 e ottiene come soluzione i numeri $y = 6$ e $x = 12$, numeri che corrispondono al valore $t = 1/3$ della soluzione generale di ORE.

Diofanto usa un linguaggio algebrico che non è sufficientemente sviluppato per dare soluzioni generali. Egli può risolvere modelli di problemi generali, ilustrando con questo metodi di risoluzione. Quando un problema coinvolge più numeri incogniti, Diofanto è costretto a esprimerli in funzione di un unico numero incognito scelto in maniera conveniente, dando valori speciali alle costanti del problema ed esprimendo eventuali parametri con valori speciali ma arbitrari.

Heath ritiene il problema II.1 "mera ripetizione" del problema I.31, ne mette in dubbio l'appartenenza all'*Aritmetica*; non ne propone la risoluzione ma aggiunge che "il rapporto di un numero richiesto all'altro è assunto essere 2:1". Il problema I.31 richiede di "trovare due numeri in un rapporto dato e tali che anche la somma dei loro quadrati abbia alla loro somma un rapporto dato". Diofanto risolve il modello di questo problema dando ai rapporti i valori speciali 3:1 e 5:1 rispettivamente e scegliendo come numero incognito x il più piccolo dei due numeri da trovare. Allora l'altro numero è $3x$, la somma dei due numeri è $4x$, la somma dei loro quadrati $10\,x^2$. Perciò $10\,x^2 = 5{\cdot}4\,x$, quindi x=2, e i numeri richiesti sono 2 e 6. Il problema I.31 possiamo tradurlo nel linguaggio algebrico moderno col sistema di equazioni

$$\begin{cases} y=q\,x \\ x^2+y^2=p(x+y) \end{cases}$$

in cui q e p sono costanti intere positive (q=3, p=5 in Diofanto).

Diofanto (o un suo antico commentatore) risolve il problema II.1 dando al rapporto il valore speciale 1:10 e scegliendo come numero incognito x il più piccolo dei due numeri da trovare. Egli esprime l'altro di questi due numeri in funzione di x, nella forma 2 x e qui 2 svolge il ruolo di un valore di parametro. A questo punto la risoluzione è "mera ripetizione" di quella vista per il caso speciale del problema 1.31.

Il metodo con cui è risolto il caso speciale del problema II.1 consente di trovare la soluzione generale in numeri razionali del problema II.1 stesso. Lo si traduce nel linguaggio moderno con l'equazione

$$x^2+y^2=p(x+y)$$

Dove p è una costante intera positiva (p = 10 in Diofanto). Ora si esprime y in funione di x, nella forma $q\,x$ dove q denota un numero razionale che svolge il ruolo di parametro. Con questo si perviene al sistema di equazioni

$$\begin{cases} x^2+y^2=p\,(x+y) \\ y=q\,x \end{cases}$$

Che fornisce l'equazione

$$x^2+q\,x^2=p(x+q\,x)$$

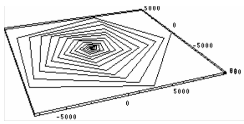
e

$$x=p\frac{1+q}{1+q^2} \quad , \quad x=p\,\frac{q(1+q)}{1+q^2}$$

Con q razionale. Queste formule danno la soluzione generale, senz'altro più semplice di quella proposta da ORE.

[**] Docente di Algebra – Università degli Studi di Padova

Sostegno invisibile (by L. C.)



In una buona poesia…

Presentiamo un significativo passaggio della relazione che Hans Magnus Enzensberger svolse durante il Festival della Matematica, tenutosi a Roma dal 13 al 16 marzo di quest'anno.

Il brano è tratto dalla sua *Lectio Magistralis*. «[…] In una buona poesia, cosí come in una formula, il grado di concentrazione è molto alto: c'è una certa economia, che ha ridotto tutto all'essenziale. C'è anche altro, in entrambi i casi: né una poesia, né una formula, sono autoesplicative. Per intenderle bisogna possedere una chiave di interpretazione, che deve per forza essere linguistica. E il linguaggio procede per analogie, similitudini, metafore, immagini. Basta cercare l'etimologia dei termini scientifici, dietro ai quali si nascondono meravigliose metafore. Ma questo significa anche che la scienza ha un'enorme produttività poetica: lo sapeva bene Coleridge, che andava a lezione di chimica «per arricchire la propria riserva di metafore». C'è una radice comune nella produttività del nostro cervello: una specie di grammatica universale, nel senso di Chomsky. C'è anche una comune capacità di invenzione linguistica, che si manifesta al meglio nella poesia e nella matematica, che sono le più sviluppate e raffinate attività umane […]».

Tratto da: http//www.auditorium.com/eventi