MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore: Luciano Corso - Redazione: Luciano Corso, Elisabetta Capotosto, Carla Benaglia - Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – 338 6416432
e-mail: lcorso@iol.it – Stampa in proprio - Numero 127 – maggio 2008

Intuizione e dimostrazione nell'insegnamento della geometria dello spazio

di Claudio Bernardi [*]

L'insegnamento della geometria è ancora sacrificato nelle Scuole Superiori, nonostante negli ultimi 20 anni il ruolo formativo della geometria sia stato rivalutato con forza da più parti. In particolare, è spesso sacrificata la *geometria dello spazio* (che, tuttavia, da qualche anno compare spesso nei temi assegnati agli esami di Stato).

Di fatto, purtroppo, si parla di geometria dello spazio soprattutto nella Scuola Primaria e nella Secondaria di Primo Grado.

È un peccato, perché l'insegnamento della geometria dello spazio offre *diverse potenzialità educative*: da un lato ci sono teoremi da dimostrare, dall'altro ci sono attività adatte per sviluppare l'intuizione, raffinare la percezione, contribuire a migliorare l'espressione linguistica.

In questo intervento mi propongo di presentare *esempi e problemi*, adatti per le Superiori (ma non solo). Premetto che mi occuperò del *linguaggio*, soprattutto per gli *aspetti logici* e per la *capacità di descrivere* una situazione.

Parlando di *intuizione*, mi riferisco alle capacità di prevedere risultati, di dominare un ambiente (anche rinunciando a dimostrazioni rigorose), di capire se una proprietà trovata in un caso particolare vale in generale.

Anche la *percezione* ha un ruolo significativo, nel riconoscimento di forme e figure in situazioni inconsuete, e nella capacità di visualizzare situazioni complesse.

In concreto: uno studente è in grado di riconoscere una simmetria in una figura, prima di sapere che cosa sia una simmetria; oppure di cogliere una regolarità senza saperla giustificare e forse nemmeno descrivere.

Si tenga inoltre presente che un ragazzo affianca alle definizioni dei concetti geometrici più importanti un'*immagine,* vista come interpretazione diretta del concetto, che non è strettamente legata alla definizione.

Nel seguito, tutte le volte che il concetto viene nominato, il ragazzo ricorre in modo spontaneo a quell'immagine.

Alcuni esercizi sul linguaggio

1. Quale delle seguenti condizioni caratterizza i vertici opposti di un cubo?

A) *il fatto di appartenere a spigoli opposti*
B) *il fatto di non appartenere ad uno stesso spigolo*
C) *il fatto di appartenere a due distinte facce parallele*
D) *il fatto di non appartenere ad una stessa faccia*

2. Assumendo che ogni retta sia parallela a sé stessa, quali delle seguenti frasi sono accettabili come definizione di rette sghembe, in geometria euclidea dello spazio? (*può essere accettabile più di una risposta*)

A) *due rette si dicono sghembe se non sono né incidenti né parallele*
B) *due rette si dicono sghembe se giacciono su piani diversi*
C) *due rette si dicono sghembe se non hanno punti in comune*
D) *due rette si dicono sghembe se non giacciono su uno stesso piano*
E) *due rette si dicono sghembe se non esiste un piano che le contiene.*

Facendo riferimento agli spigoli di una stanza (a forma di parallelepipedo rettangolo), è facile trovare due rette parallele, delle quali una giace sul pavimento e l'altra sul soffitto; così come è facile trovare due rette incidenti, delle quali una giace sul pavimento e l'altra su una parete [la B) è sbagliata]. La cosa dipende dal fatto che ogni retta giace su infiniti piani: due rette sono sghembe se nessuno dei piani su cui giace una contiene anche l'altra.

3. (*sui quantificatori*) Quali degli enunciati seguenti sono corretti? Fra questi, quale esprime la proprietà più forte?

A) **Esiste** *una retta a ed* **esiste** *una retta b tali che a e b sono sghembe.*
B) **Per ogni** *retta a,* **esiste** *una retta b tali che a e b sono sghembe.*
C) **Esiste** *una retta a tale che,* **per ogni** *retta b, le rette a e b sono sghembe*.

4. (*sulle ambiguità del linguaggio*) Illustrare con una figura la frase:
« *i cubi C e C' sono simmetrici rispetto al piano* ».

5. Confrontare il ruolo della congiunzione «e» nelle frasi seguenti:

«*Le rette a e b sono parallele.*»
«*Le rette a e b sono parallele al piano* α.»

Tre esercizi sulle rette sghembe

6. Quante sono, in un cubo, le coppie di spigoli che giacciono su rette sghembe? [*il problema richiede la capacità di "organizzare" un conto*]

7. Fra le rette individuate dagli spigoli di un cubo, trovare, se esistono, tre rette a due a due sghembe.

8. (*Dal test di ammissione alla SSIS* - 2006) Nello spazio tridimensionale euclideo sono date due rette sghembe ed un punto non appartenente ad alcuna delle due. Quale delle seguenti affermazioni è sempre vera?

A) *Esiste un'unica retta per quel punto complanare con ciascuna delle due rette*
B) *Esiste un'unica retta per quel punto incidente a ciascuna delle due rette*
C) *Esiste un'unica retta per quel punto parallela a ciascuna delle due rette*
D) *Esistono più rette per quel punto incidenti a ciascuna delle due rette*
E) *Esistono più rette per quel punto complanari con ciascuna delle due rette*

La capacità di vedere nello spazio

9.A) Sono dati un punto P e una retta r. Quante sono le rette passanti per P e parallele ad r ? Quante le rette per P ortogonali (nel senso di perpendicolari ma non necessariamente incidenti) ad r ?

B) Sono dati un punto P e un piano α. Quante sono le rette passanti per P e parallele ad α ? Quante le rette per P perpendicolari ad α ?

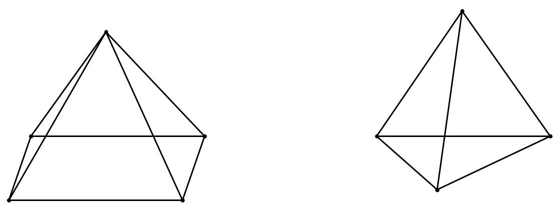
[*Nelle domande precedenti, non si richiede tanto una dimostrazione, quanto la capacità di "descrivere" la situazione.*]

10. In ciascuno dei seguenti casi, si può trarre qualche conclusione sulla posizione reciproca fra il primo e il terzo ele-

mento? (*lettere latine indicano rette, lettere greche piani*)
i) $r \parallel \alpha \parallel s$
ii) $\alpha \parallel r \perp \beta$
iii) $r \perp \alpha \perp \beta$
iv) $r \subseteq \alpha \perp \beta$

11. Sia $ABCD$ un quadrato, realizzato in cartoncino; lo si pieghi lungo la diagonale AC, in modo che i piani su cui giacciono i due triangoli ABC e CDA siano perpendicolari. Che angolo formano i segmenti DA ed AB?

12. Sono dati un tetraedro regolare ed una piramide a base quadrata le cui facce laterali sono triangoli equilateri uguali alle facce del tetraedro. Quante facce ha il poliedro che si ottiene "incollando" una faccia del tetraedro ad una faccia uguale della piramide?
[*La risposta* $5 + 4 - 2 = 7$ *è sbagliata*.]



13. Sono dati quattro triangoli uguali. È possibile costruire un tetraedro che abbia per facce i triangoli dati?

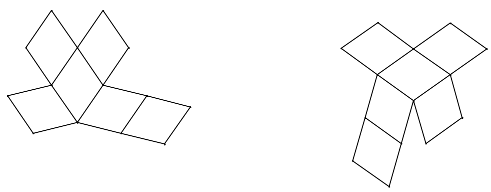
14. Lo scheletro di un cubo (cioè un cubo formato dai soli spigoli) è appoggiato su un tavolo; una lampadina (sorgente luminosa puntiforme) illumina il cubo e proietta la sua ombra sul tavolo.
A) Qual è la forma dell'ombra della faccia superiore del cubo (cioè della faccia opposta alla base di appoggio)?
B) Qual è la forma dell'ombra di una faccia laterale del cubo?

15. A) Trovare un piano che intersechi un cubo secondo un triangolo equilatero.
B) Trovare un piano che intersechi un tetraedro regolare secondo un quadrato.
C) Qual è la sezione individuata in un cubo dal piano perpendicolare ad una diagonale del cubo nel suo punto medio?

16. È dato un angolo diedro retto (cioè tale che un piano perpendicolare allo spigolo lo interseca in un angolo retto). Quali angoli piani si ottengono intersecando l'angolo diedro con un piano incidente (ma non necessariamente perpendicolare) allo spigolo del diedro?

17. (*Dal test di ammissione alla SSIS* - 2007)
Siano r e s rette sghembe e non ortogonali nello spazio euclideo tridimensionale. Ruotando la retta r attorno alla retta s, si ottiene
A) *un paraboloide*
B) *un piano*
C) *un cilindro*
D) *un cono*
E) *un iperboloide*

18. Euclide (libro XI, definiz. 10) afferma che *due poliedri sono uguali se e solo se hanno le facce a due a due uguali*. In realtà questa definizione non caratterizza i poliedri uguali: mostrare che con 6 rombi uguali (aventi tutti gli angoli minori di 120°) si possono costruire due parallelepipedi che non sono uguali (né direttamente, né inversamente).
(*In figura sono rappresentati gli sviluppi dei due poliedri.*)



Due errori tipici

19. Uno studente, per dare la definizione di rette parallele nello spazio, dice: «due rette nello spazio sono parallele se sono contenute in piani paralleli». La definizione è corretta?
(A rigore, date comunque due rette, esistono due piani paralleli che le contengono; quindi non si tratta nemmeno di una definizione "incompleta".)

20. Uno studente, per dare la definizione di rette perpendicolari nello spazio, dice: «due rette nello spazio sono perpendicolari se sono contenute in piani perpendicolari». La definizione è corretta?
(A rigore, date comunque due rette, esistono due piani perpendicolari che le contengono; quindi non si tratta nemmeno di una definizione "incompleta".)

Un esercizio in geometria sferica

La geometria sferica è una geometria non euclidea, sviluppata ben prima delle geometrie iperbolica ed ellittica, per le sue applicazioni soprattutto nella navigazione.

I *punti* sono i punti della sfera e le *rette* sono le circonferenze massime. In effetti, si dimostra che un *segmento AB* della geometria sferica individua il percorso più breve per andare dal punto A al punto B su una superficie sferica (si tratta, appunto, di seguire la circonferenza massima passante per A e per B).

21. Un aereo va da Napoli a New York. Le due città hanno grosso modo la stessa latitudine, cioè sono sullo stesso parallelo. Conviene all'aereo volare lungo il parallelo?

Il III problema di Hilbert (1900)

«In due lettere a Gerling, Gauss esprime il suo rammarico per il fatto che certi teoremi di geometria solida dipendono dal metodo di esaustione, cioè, in termini moderni, dall'assioma di continuità (o dall'assioma di Archimede).

Gauss menziona in particolare il teorema di Euclide secondo cui piramidi triangolari di uguale altezza stanno fra loro come le rispettive basi. Oggi, il problema analogo nel piano è stato risolto [*nel senso che si dimostra che due poligoni sono equivalenti se e solo se si possono scomporre in poligoni congruenti; in altre parole, si riesce ad introdurre il concetto di area di un poligono senza che siano necessari integrali, né più in generale passaggi al limite*]. […] Ciò nonostante mi sembra probabile che una dimostrazione generale del teorema di Euclide prima citato sia impossibile. […] Si dovrebbero trovare due tetraedri di ugual base e uguale altezza che non possono essere scomposti in poliedri congruenti»

Il problema fu risolto pochi anni dopo da Dehn, che dimostrò che la congettura di Hilbert era corretta.

Domande tratte dai temi assegnati agli Esami di Stato

Anno 2003

1) Quale è la capacità massima, espressa in centilitri, di un cono di apotema 2 dm?
2) Dare un esempio di solido il cui volume è dato da

$$\int_0^1 \pi x^3 \, dx \ .$$

Anno 2004

3) Si provi che la superficie totale di un cilindro equilatero sta alla superficie della sfera ad esso circoscritta come 3 sta a 4.
4) Un solido viene trasformato mediante una similitudine di rapporto 3. Come varia il suo volume? Come varia l'area della sua superficie?
[*Segue al n.* 128]

Questo lavoro è stato presentato dall'autore nella conferenza organizzata dall'Università degli Studi di Verona - Dipartimento di Informatica - in collaborazione con la Mathesis di Verona, in data 17 aprile 2008.

[*] Docente di "Fondamenti della Matematica" presso la "Sapienza", Università di Roma