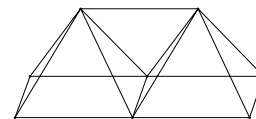


# MatematicaMente

Publicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore: Luciano Corso - Redazione: Luciano Corso, Elisabetta Capotosto, Carla Benaglia - Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – 338 6416432 e-mail: lcorso@iol.it – Stampa in proprio - Numero 128 – giugno 2008



## Intuizione e dimostrazione nell'insegnamento della geometria dello spazio

di Claudio Bernardi [\*]

[Segue dal n. 127]

**2005**

5) Una bevanda viene venduta in lattine, ovvero contenitori a forma di cilindro circolare retto, realizzati con fogli di latta. Se una lattina ha la capacità di 0,4 litri, quali devono essere le sue dimensioni in centimetri, affinché sia minima la quantità di latta necessaria per realizzarla? (Si trascuri lo spessore della latta).

6) I centri delle facce di un cubo sono i vertici di un ottaedro. È un ottaedro regolare? Quale è il rapporto tra i volumi dei 2 solidi?

**2006**

(dal Problema 1) 1) Una aiuola, una volta realizzata, ha la forma di un parallelepipedo rettangolo; una scatola, cioè, colma di terreno. Si discute di aumentare del 10% ciascuna sua dimensione. Di quanto terreno in più, in termini percentuali, si ha bisogno?

2) I poliedri regolari – noti anche come *solidi platonici* – sono, a meno di similitudini, solo cinque: il tetraedro, il cubo, l'ottaedro, il dodecaedro e l'icosaedro. Sai dimostrarlo?

4) La capacità di un serbatoio è pari a quella del cubo inscritto in una sfera di un metro di diametro. Quanti sono, approssimativamente, i litri di liquido che può contenere il serbatoio?

**2007**

1) La regione  $R$  delimitata dal grafico di  $y = 2\sqrt{x}$ , dall'asse  $x$  e dalla retta  $x = 1$  (in figura) è la base di un solido  $S$  le cui sezioni, ottenute tagliando  $S$  con piani perpendicolari all'asse  $x$ , sono tutte triangoli equilateri. Si calcoli il volume di  $S$ .

4) Un serbatoio di olio ha la stessa capacità del massimo cono circolare retto di apotema 1 metro. Si dica quanti litri di olio il serbatoio può contenere.

10) Per orientarsi sulla Terra si fa riferimento a *meridiani* e a *paralleli*, a *latitudini* e a *longitudini*. Supponendo che la Terra sia una sfera  $S$  e che l'asse di rotazione terrestre sia una retta  $r$  passante per il centro di  $S$ , come si può procedere per definire in termini geometrici meridiani e paralleli e introdurre un sistema di coordinate geografiche terrestri?

### Risposte ad alcuni degli esercizi precedenti

1. D)

2. A), D), E)

3. sono corretti A) e B)

B) esprime la proprietà più forte, nel senso che A) è una conseguenza diretta di b)

4. La frase può riferirsi a due situazioni diverse: nel primo caso, il cubo  $C$  è il simmetrico di  $C'$  rispetto al piano  $\alpha$ , mentre nel secondo sia il cubo  $C$  sia il cubo  $C'$  sono simmetrici rispetto al piano  $\alpha$ .

5. Nel primo caso la «e» significa che le due rette stanno in

una certa posizione reciproca; nel secondo caso, la «e» collega due frasi, ciascuna delle quali ha senso di per sé: «la retta  $a$  è parallela al piano  $\alpha$ » e «la retta  $b$  è parallela al piano  $\alpha$ » (la prima frase *non* significa che «la retta  $a$  è parallela» e «la retta  $b$  è parallela»). La congiunzione *e* della seconda frase (ma non la *e* della prima) è l'usuale *connettivo* logico.

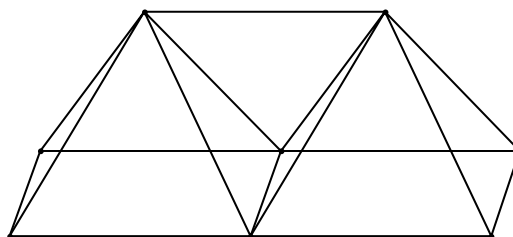
6. 24.

8. A.

10. i) nessuna conclusione; ii)  $\alpha \perp \beta$ ; iii)  $r \parallel \beta$ ; iv) nessuna conclusione.

11.  $60^\circ$ : il triangolo  $ABD$  è equilatero.

12. La risposta è 5. Nella figura si «vede» il motivo. Basta disporre due piramidi uguali con le basi quadrate, una fianco dell'altra: in mezzo c'è appunto lo spazio per un tetraedro regolare. In altre parole, quando si incollano i due solidi dati, due facce del tetraedro giacciono sullo stesso piano di due facce della piramide. Questo fatto è collegato alla tassellazione dello spazio con tetraedri regolari e ottaedri.



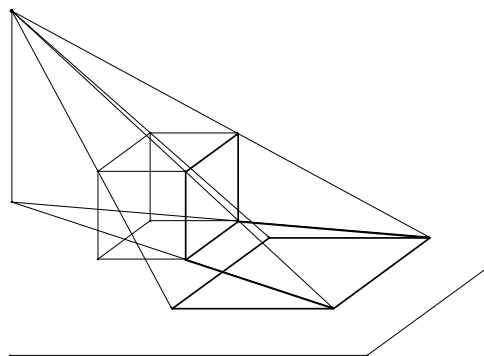
13. La figura chiave per rispondere si ricollega alla proprietà secondo cui, unendo i punti medi dei lati, un triangolo è scomposto in 4 triangoli uguali. Senza costruire un modellino di carta, è molto improbabile che un ragazzo sia in grado di arrivare alla risposta corretta (la costruzione è possibile se e solo se i 4 triangoli sono acutangoli).

14.A) L'ombra è sempre un quadrato. B) Un trapezio. Si veda la figura.

16. Tutti gli angoli convessi.

17 E

21. No; in effetti, gli aerei diretti dall'Italia all'America del Nord seguono le cosiddette "rotte artiche".



Questo lavoro è stato presentato dall'autore nella conferenza organizzata dalla Mathesis di Verona in collaborazione con l'Università degli Studi di Verona - Dipartimento di Informatica, in data 17 aprile 2008.

[\*] Docente di "Fondamenti della Matematica" presso la "Sapienza", Università di Roma

# È difficile trovare uno schema nella didattica della Matematica

di Antonino Drago<sup>[\*\*]</sup>

A prima vista, sembra difficile trovare uno schema nella didattica della Matematica (DdM).

Il primo motivo è che da alcuni decenni la DdM ha una disattenzione deliberata verso i Fondamenti della Matematica (FdM). Gliel'ha suggerita l'Insiemistica, la quale nega la utilità di indagare sui FdM, poiché pone alla base di questa teoria il concetto di insieme, che viene dichiarato "primitivo"; cioè senza definizioni e quindi indiscutibile. D'altronde gli autorevoli sostenitori dell'Insiemistica, i Bourbakisti, dagli anni '30 hanno proposto una nuova concezione della matematica che di proposito non vuole occuparsi dei FdM, per piuttosto trovare le strutture centrali con le quali coordinare unitariamente le ricerche in tutte le moltissime branche della matematica, accumulate da due secoli. Essendo risultata molto efficace per la ricerca, questa concezione di rifuggire i FdM ha influenzato anche la didattica. Eppure noi sappiamo bene che la Teoria degli insiemi ha dei precisi e pesanti presupposti fondamentali: la organizzazione di tipo deduttivo da assiomi (OA) e l'uso libero dell'infinito in atto (IA). Ma li nasconde; poiché sa che lì ci sono delle contraddizioni (antinomie di Russell).

Il secondo motivo è che la DdM non sembra presentare delle teorie, se non in minima misura. C'è sicuramente la Geometria euclidea, ma poi per trovare altre teorie occorre andare ai programmi degli ultimi anni dei Licei (tralascio quanto si presenta negli Istituti Tecnici, perché spesso riguarda solo la operatività dei concetti insegnati); lì non si capisce se la Trigonometria sia una teoria e di che tipo (certamente diversa dalla precedente) e casomai si trova la Geometria analitica, ma ridotta a una serie di problemi ad un livello di poco più che riga e compasso, o una Analisi ridotta a due nozioni fondamentali.

Come mai mentre nelle scuole superiori le altre branche della Scienza riescono a insegnare delle loro teorie, la Matematica, che pure informa quelle scienze e che è nata un millennio e mezzo prima di loro, non riesce a presentare un minimo della varietà delle sue teorie, acquisite da secoli? Sono forse le difficoltà tecniche che bloccano questo insegnamento? Se fosse vero questo, le altre branche della scienza sarebbero nate con una Matematica così elevata che oggi questa sarebbe insegnata solo all'Università. Ma ciò non è vero; basti pensare alla matematica semplice di chimica, alla termodinamica, alla ottica geometrica, alla teoria meccanica dell'urto, alla meccanica statistica, alla teoria dei computer, alla teoria dell'informazione, alla teoria dei circuiti elettrici; e credo che sia possibile aggiungere altri esempi.

Allora perché questa sottoesposizione della materia proprio in quelle scuole dove si fa cultura generale (cioè per tutti, sia quegli studenti che interromperanno gli studi, sia quelli che all'Università andranno a studiare materie non scientifiche)?

Sicuramente nel secolo XX il programma di Hilbert ha avuto il consenso della stragrande maggioranza dei matematici (anche per la grandezza della sua produzione matematica): la assiomatica è il fondamento della Matematica. Da questo punto di vista, nelle scuole è essenziale insegnare la Geometria; il resto è di contorno e complemento, dato che nelle scuole superiori il passaggio successivo previsto da Hilbert, la assiomatizzazione della geometria euclidea secondo ben cinque gruppi di assiomi, è impraticabile; e anche l'assiomatica della teoria matematica semplice è troppo astratta per poter essere insegnata agli adolescenti, spesso con poco interesse per la Matematica.

Questa spiegazione conferma che pure la DdM ha una intuizione dei FdM, intendendo questi ultimi come assorbiti nel programma di Hilbert. Sotto questa luce la DdM ha raggiunto quella unità che per la didattica della Fisica, che deve insegnare meccanica di Newton assieme ad esempio alla termodinamica di Carnot, è inaccessibile. Con Hilbert la Matematica

si presenta senza pluralismo teorico: tutte le teorie matematiche sono riconducibili alla sola OA. Essa quindi è la teoria perfetta, e nello stesso tempo uno strumento perfetto, che non lascia alternative.

Ma sappiamo bene che questo programma dopo trent'anni circa ha incontrato un ostacolo insormontabile nel teorema di Gödel; per cui oggi il programma di Hilbert è molto ridimensionato. Esso inoltre ha avuto programmi rivali che danno una varietà di atteggiamenti sui FdM. Allora questo secondo motivo indica un così forte rapporto di sudditanza culturale della DdM da una teoria (o meglio un semplice programma sul futuro) dei FdM, quella di Hilbert, da non potere nemmeno avvicinare la Matematica moderna e le sue problematiche, tanto da doversi dedicare a semplici spezzoni di teorie elementari del passato. Perciò spesso ricorre la domanda basilare della didattica più avvertita: insegnamento per principi assiomi (OA) o per problemi (OP) (strumentali)?

Un terzo motivo è che la DdM in effetti presenta varie teorie, però in maniera limitata; la causa è nelle difficoltà tecniche che si incontrano per precisarne i contenuti e nelle limitazioni di tempo in cui è compressa questa materia di insegnamento nelle scuole superiori. Allora quegli spezzoni sono da intendere tutti come teorie, o almeno come loro introduzioni.

Cerchiamo allora di esaminare la pluralità di teorie delle DdM. A mia conoscenza, nella didattica svolta usualmente possono essere riconosciute le seguenti teorie matematiche: Geometria euclidea, Teoria dei numeri irrazionali, Algebra elementare, Teoria delle funzioni (elevationo a potenza e logaritmo), Trigonometria, Geometria analitica, Analisi. In altri termini, lo studente di Matematica (che non sia subito esposto alla Teoria degli Insiemi) incomincia ad avere una minima idea di che cosa sia una teoria matematica quando studia la Geometria euclidea, i numeri irrazionali e l'Algebra elementare. Ha una idea della Teoria delle funzioni con la definizione dei logaritmi, si introduce ad una curiosa teoria, la mezza pratica e mezza scienza Trigonometria, e infine nota un salto teorico forte quando passa a studiare (nei Licei scientifici) la Geometria analitica e alcune nozioni di Analisi.

Questa interpretazione (spezzoni di teorie come introduzione a teorie) incontra la obiezione che non si fa un buon servizio educativo nel presentare del semplice materiale matematico come se fosse una teoria; quello che ne resta per quella cultura generale a cui è destinato l'insegnamento medio superiore è poco educativo e poco rispettoso per la natura della Matematica stessa. Non a caso nella cultura generale c'è una generale disaffezione culturale per la Matematica.

In definitiva, non esiste una vera DdM, ma solo un indottrinamento di Matematica.

Il presente articolo è una parte della relazione tenuta dall'autore il 17 maggio 2008 durante il convegno di Aversa sul tema "Qual è il ruolo culturale ed interdisciplinare delle scienze fisiche e matematiche?" organizzato dall'Istituto Jommelli e dalla AIF di Latina, Calitri, Minturno, Napoli 1 e Napoli 2.

[\*\*] Ex docente di Storia della Fisica – Università degli Studi "Federico II" di Napoli – e-mail: drago@unina.it

## Perché il faccia faccia Berlusconi-Ventroni non è andato in onda

Nell'ultima tornata elettorale italiana, le formazioni politiche distinte erano 18, alla Camera. Un mese prima delle elezioni ci si poneva il problema di organizzare confronti diretti a due a due tra i 18 leader. Quanti distinti incontri si sarebbero dovuti organizzare e potevano essere organizzati nel giro di un mese, nel rispetto del sistema di vincoli dato dalla par condicio? Si trattava di determinare le combinazioni di 18 elementi presi a due a due (l'ordine non conta). Il risultato è:

$$\binom{18}{2} = \frac{18 \cdot 17}{2} = 153 .$$

153 incontri non si sarebbero potuti organizzare. Allora, in questo sistema elettorale il faccia faccia Berlusconi-Ventroni, per la par condicio, non poteva andare in onda e così è stato. (Carla Benaglia)