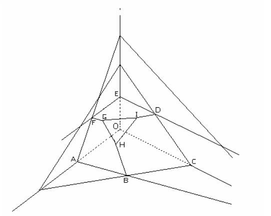
MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore: Luciano Corso - Redazione: Luciano Corso, Elisabetta Capotosto, Carla Benaglia - Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – 338 6416432
e-mail: lcorso@iol.it – Stampa in proprio - Numero 129 – luglio 2008



CHE SENSO HANNO LE TEORIE MATEMATICHE INSEGNATE ?

di Antonino Drago [*]

1. Quali fondamenti della matematica ?

Ora prendiamo sul serio il progetto dell'insegnamento della matematica: esso vuole insegnare delle vere e proprie teorie. Ma allora che senso ha l'insieme (elencato nel numero scorso – *MatematicaMente* n. 128) delle teorie proposte? La risposta dipende da quale concezione dei fondamenti della matematica (FdM) si ha. Se essi fossero dati dalla teoria dei numeri e dalla geometria euclidea, allora l'insegnamento superiore starebbe bene come sta; ogni cosa di più di quelle due teorie è tutto un avanzamento. Se essi fossero dati dall'analisi infinitesimale, allora la didattica si potrebbe solo avvicinare ad essa. Se essi fossero sintetizzati dalla teoria degli insiemi, allora tutta la didattica sarebbe solo propedeutica a quella universitaria, salvo il linguaggio insiemistico, da introdurre sin dalle elementari. Se essi fossero dati dalla logica matematica, allora la didattica non ha difficoltà tecniche per introdurre abbastanza bene alla materia; ma non lo fa; forse perché occorre troppa capacità di astrazione. Se essi fossero dati da idee filosofiche, occorrerebbe cambiare la natura stessa dell'insegnamento di matematica.

Nel passato ho proposto una nuova concezione dei fondamenti della scienza e in particolare quelli della matematica: [1]

1° Essi sono dati da due opzioni, indipendenti tra loro: sull'infinito e sull'organizzazione della teoria considerata [Tab. 1].

2° Ogni opzione ha due scelte dicotomiche possibili: o l'infinito in atto (IA), o quello potenziale (IP); o l'organizzazione assiomatica o più semplicemente deduttiva (OA), o quella basata su un problema (OP).

3° Dalla seconda metà del secolo scorso le scelte sulle due opzioni sono state formalizzate scientificamente; le scelte sull'infinito mediante la matematica: o la matematica classica, o la matematica costruttiva (grosso modo, quella dei computer); le scelte sull'organizzazione con la logica: o la logica classica, o quella intuizionista (grosso modo, induttiva).

Quali fondamenti delle teorie insegnate?

Allora vediamo quali siano le scelte fondamentali delle teorie insegnate.

Ad un primo sguardo su questo insieme, appare subito che la Geometria euclidea propone la scelta OA, l'algebra elementare la scelta IP e la Analisi la scelta IA. Se si mettessero in luce anche solamente questi fatti, lo studente avrebbe una indicazione del fatto che ci sono dei FdM e che essi sono diversi per le varie teorie. Ma si noti, nessuna teoria presenterebbe due scelte; le quali così apparirebbero separate tra loro. Allora esaminiamo quale coppia delle scelte fondamentali ha ciascuna teoria proposta.

L'Algebra elementare sembra la più chiara nei suoi fondamenti: è legata al risolvere problemi (OP) ed usa operazioni di calcolo solo effettive (IP). I numeri irrazionali vengono presentati come numeri approssimati dalla esecuzione di una operazione di calcolo effettivo, la radice quadrata; quindi sono presentati all'interno dell'IP. Però poi il libro di testo aggiunge la frase: "Ora pensate tutti i numeri con infinite cifre. Questi sono i numeri reali." Già di per sé il salto alla totalità è un IA, tanto più lo è quando si vogliano stringere con un solo atto di pensiero dei numeri, ognuno dei quali ha in atto infinite cifre. Quindi la vera scelta di questa teoria è l'IA, l'unica che permette di passare da una serie finita di esempi all'infinità dei reali classici.

La Geometria che viene studiata nella scuola è qualcosa che più delle altre appare come una teoria; perché impegna lo studente a ragionare in maniera più limpida di quando egli deve risolvere espressioni algebriche od ottenere il risultato di una equazione di secondo grado. Tanto più che la didattica della Geometria meritoriamente fa riflettere su questo lucido ragionare, perché indica il metodo con cui qui si ragiona: a partire da principi, per poi procedere con deduzioni, tutte ben caratterizzate come teoremi (cosa del tutto sconosciuta nel calcolo delle espressioni, dove, per far risaltare la utilità del calcolo in oggetto, si lascia lo studente all'oscuro di quei principi dell'algebra che egli di fatto applica). Così la didattica presenta la Geometria come esempio di sistema deduttivo che discende da pochi e ben precisati principi (enunciati in maniera più o meno antiquata: alla Euclide, o in forma più moderna). Quindi si chiarisce che la teoria è del tipo che noi qui chiamiamo OA. Però la presenta l'OA come una *scelta* della Matematica, perché non se ne dà alternativa: si sottintende che OA è il modello a cui tutta la Matematica deve tendere per raggiungere la forma ideale.

Per di più la didattica della Geometria non chiarisce che tipo di infinito usa. Sappiamo bene che i Greci svilupparono questa teoria proprio per non incontrare le incommensurabilità degli irrazionali (infatti Eudosso diede le regole con le quali parlare di grandezze in geometria, in modo da usare sempre proporzioni, le quali preservano i razionali, e senza mai passare ai dati numerici delle misure). L'aggancio all'IP sembra assicurato anche dall'uso di solamente riga e compasso per verificare (o costruire) ogni ragionamento con apposite costruzioni geometriche, e con questi strumenti concreti non rischiare di superare il regno del finito.

Ma di fatto è così? Ora che conosciamo le varie geometrie non euclidee, sappiamo che quella euclidea non si distingue dalle altre per aver scelto l'IP; anzi, sappiamo bene che essa corrisponde al valore infinito in atto del raggio di curvatura dello spazio; cioè IA. Anche senza scomodare l'infinità delle misure, sappiamo che la distinzione tra le tre geometrie sta tutta nella diversa somma degli angoli di un triangolo; ora nel caso euclideo la somma deve essere esattamente 180°; cioè con una precisione assoluta nelle misure (come nello stabilire la unica parallela ad una retta data; ma qui Euclide trovò l'escamotage di parlare solo di quando due rette, tagliate da una trasversale, non si incontrano). Quindi l'infinito della geometria euclidea è IA, contrariamente a quanto appare e come la didattica fa vedere.

Tabella 1. I fondamenti della Scienza

		ASPETTO	
		Filosofico	Scientifico
I FONDAMENTI	Infinito	In Atto	Matematica Classica
		Potenziale	Matematica Costruttiva
	Organizzazione	Per assiomi	Logica classica
		Su un problema	Logica Intuizionista

Quando si definisce il logaritmo, lo studente sa che può capire fino a metà. Il fatto che il logaritmo sia la operazione inversa dell'elevamento a potenza gli può entrare in testa, ma certo lui non capisce bene sotto quali vincoli e fino a che punto si può parlare di funzione inversa; né è alla sua portata il perché si debbano escludere argomenti negativi. Quindi, benché il logaritmo risulti oggi una funzione della Matematica costruttiva (cioè solo IP), di fatto esso si presenta come un salto ad un mondo incontrollabile, l'IA. D'altra parte ciò non dispiace ai matematici universitari, perché quel concetto introduce alla sottigliezza della Teoria delle funzioni, le quali usualmente (e specie quelle patologiche) fanno appello all'IA. Inoltre la didattica presenta il logaritmo sotto l'aspetto strumentale, OP; ma di fatto vuole introdurre lo studente a concepire il concetto astratto di funzione, da cui ricavare qualsiasi funzione (OA).

La Trigonometria viene giustificata con le operazioni sul terreno, quindi appare come scienza pratica e di calcolo concreto, IP; anche perché di fatto la trigonometria ha un forte aspetto algebrico (che sappiamo provenire dalle simmetrie nelle rotazioni del cerchio). Ma di fatto essa introduce a funzioni a valori trascendenti, che lo studente non ha affatto la possibilità di controllare nella loro operatività (tanto più che per la stragrande maggioranza dei matematici universitari la trigonometria discende dalla Analisi infinitesimale, perché è stata presa in considerazione teorica solo dal tempo di Eulero, che la ricavò come sottoprodotto della risoluzione delle equazioni differenziali). E quindi allo studente (e ai matematici) appare come IA. Inoltre, essendo rivolta a risolvere problemi pratici, la trigonometria sarebbe una teoria OP. Ma il suo insegnamento parte da alcune formule base, date a priori; quindi è una teoria OA. [*Segue al numero* 130]

[*] Ex docente di Storia della Fisica – Università degli Studi "Federico II" di Napoli. E-mail: drago@unina.it

[1] A. Drago: *Le due opzioni*, La Meridiana, Molfetta BA, 1991.

Il concetto di massa secondo Mach

di Vincenzo Zamboni [**]

Ernst Mach (1838 – 1916), professore di fisica nelle Università di Graz e di Praga, quindi di filosofia a Vienna, considerato, insieme a R. Avenarius il fondatore dell'empiriocriticismo, sottopose ad una critica rigorosa i principi della dinamica di Newton, ispirandosi ad una concezione secondo cui la scienza deve seguire un principio di economia relativamente ai concetti ed alle leggi fondamentali, che devono essere contenuti nel minor numero possibile.

In particolare, nella sua opera *La Meccanica nel suo sviluppo storico-critico* (1883) è discusso e rifondato il concetto di massa, che nella tradizionale impostazione newtoniana dipende da quello di forza, il che rende, secondo Mach, tale definizione non sufficientemente 'intrinseca'.

Sappiamo che l'intera meccanica di Newton si basa su tre leggi, delle quali, in verità, solo due sono veri principi, dato che la legge di inerzia è deducibile come caso particolare dalla $F = m \cdot a$ (basta porre $a = 0$). La terza legge (principio di azione e reazione, confermato dall'osservazione dei fenomeni naturali) si può sinteticamente esprimere come:

$$F_{12} = -F_{21} \qquad (1)$$

(F_{ij} indica la forza che il corpo i esercita sul corpo j), ovvero :

$$m_2\, a_{12} = -m_1\, a_{21} \qquad (2)$$

(analogamente, a_{ij} è l'accelerazione del corpo j provocata dal corpo i). Per semplicità, consideriamo un sistema isolato formato da due soli corpi (in modo che lo studio del loro comportamento non sia disturbato dagli effetti prodotti da altri), i quali interagiscono tra loro (per esempio, a causa della gravità). Dalla (2) si può dedurre facilmente

$$m_2 = -m_1(a_{21}/a_{12}) \,. \qquad (3)$$

Ora, scegliamo arbitrariamente, come unità di massa, $m_1 = 1$ (scelta che è sempre lecito fare), col che otterremo una definizione di massa semplice ed elegante, nella forma :

$$m_2 = -\,a_{21}/a_{12} \qquad (4)$$

ove m_2 può indicare una massa qualsiasi. La nuova definizione è basata solo sulle accelerazioni di due corpi (quello scelto come campione unitario, e l' altro), cioè su osservabili che richiedono solo l'uso di regoli graduati ed orologi, già adottati per le misure di spazio e tempo, eludendo il problema di introdurre dinamometri, o bilancie, o altri strumenti specifici, che si rendono necessari se si debbano misurare delle forze. Essendo il concetto di accelerazione (rapidità di variazione della velocità) più elementare di quello di 'forza', si è costruita una nuova definizione di massa, che Mach chiamava "intrinseca".
Egli riteneva che, in generale, la scienza altro non sia se non sistemazione logica e razionale delle osservazioni, opera in cui, come detto, giova ridurre al minimo il numero dei concetti fondamentali necessari.
È ben vero che all'inizio del discorso abbiamo dovuto assumere di sapere che cosa sia una forza. Ma lo sviluppo del ragionamento ci ha permesso, poi, di abbandonare tale concetto, divenuto superfluo. Il percorso logico è stato simile a quello che adottiamo frequentemente, quando semplifichiamo una espressione algebrica : ci accorgiamo, nel corso dei calcoli, che certe espressioni e variabili della formulazione iniziale non erano indispensabili, e ce ne liberiamo (salvo conservare, a volte certe condizioni di esistenza necessarie, come accade quando si impone che x sia diversa da zero, dopo avere semplificato un fattore comune a denominatore con uno a numeratore).

La ridefinizione di Mach risulta, dunque, utile proprio come esempio di economia del discorso logico, che utilizza, alla fine, il numero minimo di presupposti indipendenti. Ciò può rendere più semplice l'assimilazione del concetto, e il suo uso. Inoltre, si tratta di un concetto dinamico, che dipende direttamente dall'osservazione del moto, ed appare, quindi, facilmente adattabile alla teoria relativistica. In effetti, va ricordato che le teorie di Mach ebbero un peso determinante nelle riflessioni giovanili di Albert Einstein.

Bibliografia: [B.1] Dario Graffi, *Lezioni di Meccanica Razionale*, ed Pàtron, Bologna, 1975. [B.2] Ministero della Pubblica Istruzione, *Conferenze di Fisica*, Feltrinelli, 1976. [B.3] Enciclopedia Universale Rizzoli-Larousse, ed. it. Rcs libri, Milano, 2007, alla voce: *Mach*.

[**] Socio Mathesis di Verona; e-mail: *vincenzo.zamboni@gmail.com*

Non l'avrei pensato, così presto

Alla fine di luglio è morta Carla Benaglia, nostra socia (storica) e collaboratrice di redazione. Da tempo colpita da un male che spesso non lascia scampo, ha sopportato con cristiana rassegnazione la sua sofferenza senza mai cedere neppure per un momento nel suo interesse per la matematica e nella sua dignità di donna. Carla, oltre a essere stata collega nella mia stessa scuola, è stata un'amica sempre disponibile all'aiuto per la funzionalità della nostra sezione. Da certosina qual era, ha lavorato in redazione dimostrando una grande abilità nel cogliere ogni più piccolo errore, ogni *refuse*, nel testo degli articoli da pubblicare. L'ho vista un mese prima della sua morte e non mi era sembrata in cattivo stato, ma questo genere di mali sviluppa la sua virulenza quando meno te lo aspetti e dopo un po' l'esito è scontato. Non avrei pensato che se ne andasse così in fretta. La ricorderò come una infaticabile appassionata nella cura della logica, del metodo critico razionale e dell'ordine, come un'amica sincera, dialettica, con un animo sensibile verso ciò che è umanesimo integrale.

Tutto il direttivo della sezione di Verona della Mathesis Le è grato per il lavoro che ha svolto e per la passione che ha dimostrato nel campo della matematica ed esprime il proprio cordoglio per la sua morte. (*L. Corso*)

A proposito dei rifiuti di Napoli…

L'ecologia ha i suoi postulati. Barry Commoner (noto biologo ed ecologo), nel 1971, scrisse che il primo postulato dell'ecologia è: «*Ogni cosa va a finire da qualche parte*». Ancora c'è chi non lo crede!