MATHESIS

Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche
Fondata nel 1895

Sezione di Verona

Redazione: Luciano Corso, Luigi Marigo, Elisabetta Capotosto – Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045)8344785 - Numero 13 - gennaio 1999

Perché funziona l'esperimento di Galton ?

di Arnaldo Vicentini

L'esperimento di Galton, propedeutico alla teoria della misurazione nei programmi di Fisica, è mostrato per avvalorare la legge dei grandi numeri. Ma nasconde un imbroglio! Una schiera di biglie, fatte uscire da un tubo su un piano inclinato per gravità, attraversa con apparente slalon casuale, *n* linee sfalsate e orizzontali di pioli equiintervallati (fig. 1).

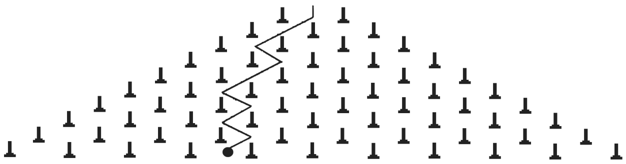


fig. 1

All'uscita dall'ultima porta le biglie, raccolte in pile verticali, formano l'istogramma della distribuzione, molto simile alla binomiale con evento elementare equiprobabile. La spiegazione che si dà è questa: ad ogni linea orizzontale, ogni biglia incontra centralmente un piolo con uguale probabilità di scansarlo a destra o a sinistra. E qui sta l'imbroglio! Se il campo fosse perfetto e ogni urto centrale, una pallina non andrebbe né a destra né a sinistra. Siccome nulla è perfetto, la biglia va di qua o di là: ma una pallina che ripetesse quel passaggio, andrebbe dove è andata la prima. L'incertezza sta solo nell'impatto col primo piolo. Facendo uscire una pallina alla volta, le biglie si raccolgono soprattutto in due pile preferite! E come mai il gioco funziona così bene se si fanno uscire tante palline di fila? La cosa è molto semplice. La prima biglia, colpendo un piolo con urto non esattamente centrale, sceglie dove deviare. Così facendo, però, la pallina che segue riceve una spinta frenante eccentrica dall'altra parte: e scanserà il piolo a sinistra se la precedente è passata a destra (e viceversa). È come se ogni porta ricordasse come è stato scansato il piolo davanti e inviasse la biglia al contrario della precedente. Il fenomeno, dunque, non è casuale ma deterministico e periodico: di periodo 2^n se n sono i livelli di pioli. Casuale, semmai, è la deviazione da tale periodicità a causa di perturbazioni accidentali durante l'esecuzione del fenomeno. Ve lo dice uno che ha fatto laboratorio per decenni e ha simulato al computer entrambe le situazioni: casuale e deterministica.

Avviso: Troisieme Université D'Eté Européenne - *Histoire et Epistemologie dans l'education Mathematique* – Louvain-la Neuve (15-18 juillet 99) - Leuven (18-21 juillet 99) - Per informazioni: P. Radelet, Institut de Phisique Théorique (FYMA) – Université catholique de Louvain, chemin du Cyclotron 2, B-1348 Louvain -la-Neuve, Belgique – tel. (32)10-473280 – fax (32)10-4724 14
e-mail: Radelet@fyma.ucl.ac.be
http://ramses.umh.ac.be/ noel/uni vete.htm

Le espressioni matematiche celebri che hanno cambiato il modo di pensare

di Luciano Corso

Secondo Michael Guillen "Le cinque equazioni che hanno cambiato il mondo" (Longanesi & C editore, 1997, Milano; il libro va consigliato) sono:

• Legge di gravitazione universale:

$$F = -G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{d^2} \quad \text{di Isaac Newton} \qquad (1)$$

ove: F e la forza gravitazionale che si manifesta tra due corpi di massa rispettivamente m_1 e m_2, d è la distanza tra i due corpi e G è una costante gravitazionale. È fondamentale per la dinamica, per l'evoluzione dei corpi celesti e per i voli spaziali.

• Legge sui fluidi:

$$P + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2 = costante \quad \text{di Daniel Bernoulli} \qquad (2)$$

ove P è la pressione di un fluido, ρ è la densità del fluido, v è la sua velocità. È fondamentale per il moto nei fluidi (la navigazione, il volo, i moti nelle condotte di fluidi vari).

• Legge sulle forze elettromagnetiche:

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \quad \text{di Michael Faraday} \qquad (3)$$

(formalizzata da James Clerk Maxwell). I simboli sono: $\boldsymbol{E}$ è il vettore campo elettrico, $\boldsymbol{B}$ è il vettore induzione magnetica, t è il tempo. È fondamentale per la comprensione della relazione tra variazioni di flusso magnetico e forza elettrica; è uno dei presupposti per la formulazione della equazione delle onde elettromagnetiche.

• Legge sull'entropia:

$\Delta S_{universo} > 0$ di Rudolf Clausius (4)

ove S è l'entropia. È fondamentale per la comprensione delle dinamiche energetiche in sistemi chiusi: si hanno applicazioni fondamentali nello studio dei gas, nei motori di ogni tipo e in informatica.

• Legge che lega la massa all'energia:

$E = m \cdot c^2$ di Albert Einstein (5)

dove E è l'energia, m è la massa di un corpo, c è la velocità della luce. È una scoperta fondamentale che consente di comprendere l'equivalenza tra massa ed energia, con la possibilità di sfruttare l'energia contenuta nella materia. Si sono avuti sviluppi importanti nello sfruttamento dell'energia nucleare.

Altre espressioni matematiche sono state ugualmente importanti ed hanno contribuito a cambiare i modi di pensare degli uomini. Altri uomini hanno saputo dare interpretazioni significative dei fatti e dei fenomeni della natura, di modi di ragionare, mediante modelli matematici chiari, spesso sintetici e sempre profondi anche là dove sono state colte solo particolarità ritenute irrilevanti dai più. Questa rubrica vorrebbe onorarli, con il vostro aiuto: daremo così un contributo per farli conoscere nella cosa più bella che hanno saputo fare. La ricerca è aperta.

Per incominciare propongo una sesta equazione fondamentale per la scienza moderna che non è stata presa in considerazione da Guillen, ma che si trova in modo pregnante in tutti i fenomeni naturali:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\cdot\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\cdot\sigma^2}}\ ;\ D:\{x|x\in\Re\}$$ di C. F. Gauss (6)

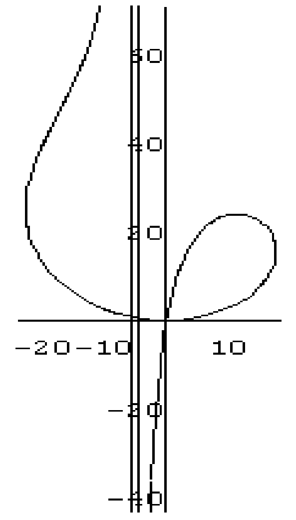
dove *x* è una variabile aleatoria con media μ e deviazione standard σ, *f(x)* è la densità di probabilità associata ad *x* e descrive il comportamento probabilistico di *x*. La f(x) descrive la distribuzione degli errori nelle misurazioni dei fenomeni naturali; ma può esprimere anche la libertà della natura dal determinismo che gli uomini presumono e attribuiscono ad essa. È anche il fondamento di gran parte della statistica inferente (la teoria dei grandi campioni si basa su questa equazione). Non esiste ricerca scientifica sperimentale che non venga supportata da questa densità di probabilità. Una curiosità: sui dieci marchi tedeschi, insieme all'effigie di Gauss, viene riportata, così come sta scritta qui, la *f(x)* e ne viene rappresentato il suo grafico.

L'ofiuride

Il suo nome deriva dal fatto che simula le spire di un serpente (afide). È una curva con forti legami con la cissoide di Diocle (vissuto 100 anni prima di Archimede). La sua equazione in coordinate polari è:

$$r = a\cdot sen\,t - b\cdot\frac{sen^2 t}{cos\,t}.$$

Qui, è stata tracciata assegnando ai parametri i valori*: a=40, b=5 e* variando *t* nell'intervallo *{-2·π, 2·π}.*



Bibliografia: Luciano Cresci, Le curve celebri, ed. Muzzio, Padova, '98

Alcune sorprendenti applicazioni riguardanti la continuità

di Franco Nuzzi *

Spesso pensiamo che alcuni settori della matematica siano talmente interni alla teoria da risultare *immuni* da una modellizzazione che li riporti ad aspetti concreti della realtà. Le cose non stanno sempre così. Considerate ad esempio le seguenti due questioni:

1) Assumendo che l'equatore terrestre sia una grande circonferenza, esiste, in un dato istante, una coppia di punti antipodali dove la temperatura dell'aria è la stessa?

2) E' possibile con un unico taglio rettilineo bisecare simultaneamente due frittelle piane di forma arbitraria?

Le due domande, apparentemente scorrelate, hanno uno sfondo concettuale preciso: la continuità ed il cosiddetto teorema del valore intermedio anche noto come teorema di Bolzano: "***Se f è una funzione continua definita in un intervallo chiuso [a,b] tale che f(a)<f(b) per ogni c per cui f(a)<c<f (b), allora vi è x_0 in [a,b] per cui risulta: f(x_0) = c***". Nelle stesse ipotesi, ***se f(a) ed f(b) hanno segno opposti allora f(x_0)=0 se c=0***. Una osservazione importante è che abbiamo qui un teorema di esistenza: proviamo che x_0 esiste anche se non è dato un procedimento costruttivo per determinarlo con esattezza. Questo è un buon punto per mettere in evidenza la differenza fra le dimostrazioni relative all'esistenza e quelle costruttive, e magari per fare un po' di storia sui moderni orientamenti dei matematici e sulle posizioni *ideologiche* (intuizionisti, costruttivisti, idealisti) sfatando anche il tabù di una scienza scevra da dibattiti interni e diatribe. Le due questioni hanno risposte affermative. La prima discende dal seguente teorema: *Sia f una funzione continua definita su una circonferenza con valori in R. Esiste allora una coppia di punti antipodali x e x* tali che f(x) = f(x*).* Consideriamo una circonferenza C (fig. 2) con raggio unitario e centro nell'origine. Sia α la coordinata angolare di un suo punto x. Definiamo ora una funzione continua g(y) sull'intervallo I=[-1;1]. Associamo ad ogni y in I un punto x sulla semicirconferenza superiore di C e sia x* il punto antipodale di x. Sia g(y) = f(x) - f(x*) = f(α) - f(α + π). I valori di g agli estremi di I sono g(1) = f(0) - f(π) e g(-1) = f(π) - f(0). Da cui g(1)

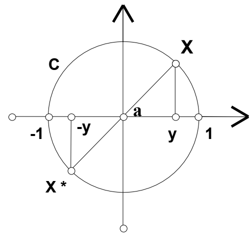


fig. 2

= - g(-1). Per il teorema di Bolzano allora esiste y_0 in I tale che g(y_0) = 0. Se x è il punto sulla circonferenza che corrisponde a y_0 allora f(x) = f(x*). Consideriamo ora due frittelle piane poste in un cerchio C (fig. 3). Per ogni punto x su C sia D_x il corrispondente diametro ed L_t la perpendicolare a D_x passante per

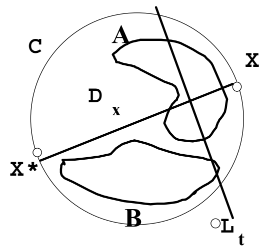


fig. 3

un punto di D_x posto a distanza t da x: $0 \leq t \leq d$ dove d è il diametro. Siano $f_d(t)$ ed $f_s(t)$ le aree della frittella A rispettivamente a destra e a sinistra di L_t. Tali funzioni definite in [0,d] sono entrambi continue insieme con la loro differenza f(t) = $f_d(t)$ - $f_s(t)$. Si ha che f(0) = -f(d) e quindi vi è un punto **t** tale che f(**t**)=0 ovvero f_d(**t**)=f_s(**t**). In **t** L_t divide perciò la frittella A a metà. Si può dimostrare che esiste un x_0 per cui la retta L_t corrispondente divide in parti uguali anche B. Siano $g_1(x)$ l'area di B che sta più vicina a x e $g_2(x)$ quella dell'altra parte. Sia g(x)= $g_1(x)$ - $g_2(x)$ definita su C e continua su esso. Quando x muovendosi in modo continuo su C passa per il suo antipodale x* le due parti della figura B si scambiano di posto e ciò implica evidentemente che g(x*)=$g_2(x)$ - $g_1(x)$ = - g(x). D'altra parte per il teorema precedente vi è un punto x_0 per cui g(x_0)=g(x_0*). Le due eguaglianze g(x)=g(x*) e g(x) = -g(x*) implicano allora che g(x_0) = 0 cioè vi è un punto x_0 sul cerchio per cui la retta $L_\mathbf{t}$ taglia entrambe le figure a metà!

Bibliografia: [1] Shashkin, Fixed Points, AMS,1989; [2] Courant e Robbins, Che cos'è la Matematica?, Boringhieri,; [3] Davis & Hersh, L'Esperienza Matematica, Edizioni di Comunità,1985

** Socio Mathesis – Liceo Q. O. Flacco di Bari*

Perché è sbagliato $(a+b)^n=a^n+b^n$?

di Luigi Marigo

Prima di tutto lo è e basta (non si mette in discussione l'errore). Ma si può dare una spiegazione: l'erronea uguaglianza corrisponde a una ipotetica proprietà distributiva della potenza rispetto alla somma, ma se vediamo le operazioni elementari dirette ordinate gerarchicamente, col prodotto che è somma di addendi uguali e la potenza che è prodotto di fattori uguali:

$$\underbrace{a+a+\ldots+a}_{n\ volte}=a\cdot n \qquad \underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\ volte}=a^n$$

si passa dall'una all'altra definizione sostituendo il (+) con il (·) e spostando il contatore *n* a esponente. Se esprimiamo ora la proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma *[(a+b)·n =a·n+b·n]* e promuoviamo gerarchicamente *[(+)→(·), (·n)→()^n]*, otteniamo: $(a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n$, proprietà distributiva della potenza rispetto al prodotto. È evidente che le operazioni gerarchicamente più elevate sono distribuite rispetto a quelle inferiori; ma senza salti nella catena gerarchica: siccome $(a+b)^n=a^n+b^n$ comporta un salto nella gerarchia, l'uguaglianza è errata.