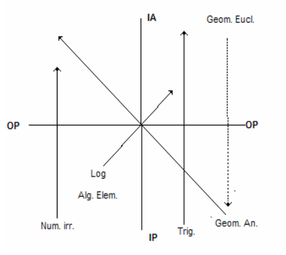
MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore: Luciano Corso - Redazione: Luciano Corso, Elisabetta Capotosto, Carlo Marchiori - Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – 338 6416432
e-mail: lcorso@iol.it – Stampa in proprio - Numero 130 – agosto 2008 – stampato il 17 – 11 – 2008



CHE SENSO HANNO LE TEORIE MATEMATICHE INSEGNATE ?

di Antonino Drago [*]

[*Segue dal numero* 129] La Geometria analitica nasce dal rappresentare numericamente i punti dello spazio euclideo. Avendo a priori la geometria euclidea, essa è una teoria OA. Ma nella didattica essa viene presentata sotto forma di problemi da risolvere, quindi come una OP. Le sue tecniche sono di calcolo, superano quelle di riga e compasso (che danno numeri all'interno di quello che sappiamo essere il campo dei numeri euclidei, che costituiscono un sottocampo degli irrazionali del tutto costruttivo; quindi IP); ma per lo studente e nella storia, i numeri irrazionali risultano appartenere per definizione all'IA (oltre al fatto che alle volte le soluzioni delle equazioni quadratiche sono immaginarie); quindi la Geometria analitica appare introdurre lo studente all'IA.

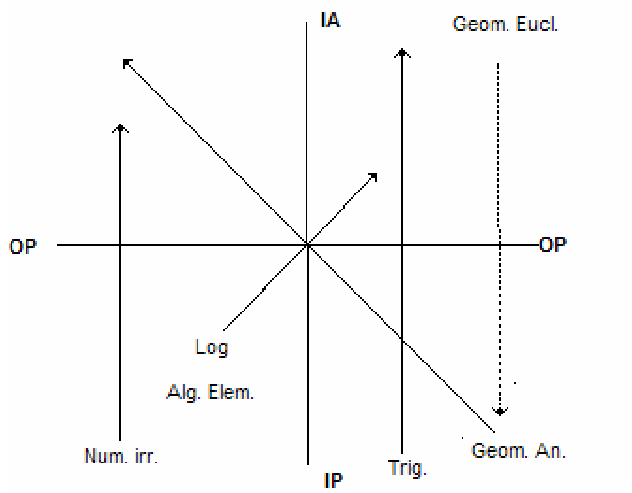


Fig. 1: *Le scelte fondamentali delle teorie Matematiche della didattica scolastica*

Quando poi si esamina quello che nelle scuole superiori si racconta dell'Analisi, si vede che essa viene insegnata per poche nozioni mediante un misto di operativismo e di idealismo, strumentalizzato ad ottenere comunque una regola di calcolo di Analisi. In questo caso, le scelte fondamentali, sono proprio fuori portata della intuizione, che richiede chiarezza e precisione nelle nozioni insegnate. L'IA sembra evidente; che la teoria sia OA o OP è del tutto oscuro.

Se dovessimo inserire la Teoria degli Insiemi, essa aggiungerebbe confusione: Infatti sappiamo che essa è IA e OA, mentre invece la DdM la presenta innocentemente con esempi finiti (IP) e rivolta a trovare i m.c.m e i M.C.D. (OP).

La figura 1 rappresenta, secondo la figura della rosa dei venti, le scelte fondamentali delle teorie (o quasi) insegnate. Ogni freccia indica la collocazione che la presentazione didattica dà alla teoria, rispetto a quella effettiva. Vediamo che la didattica presenta quasi tutte le teorie matematiche sfalsandole rispetto ai FdM (sola eccezione: l'algebra elementare). Inoltre gli sfalsamenti sono di tutti i tipi, così da non poter essere intuiti e corretti.

In questa situazione poco chiara, lo sforzo intuitivo dei didatti della Matematica non aveva modo di intuire una struttura fondazionale attraverso le teorie insegnate e di conseguenza queste non manifestano uno sforzo epistemologico per individuarli o per intuirli [2]. Questa valutazione deve essere corretta, perché non tiene conto della chiarezza sui FdM di almeno una teoria, l'Algebra elementare (IP e OP). Ma quella insegnata a scuola non giunge ad essere nemmeno un'introduzione ad una teoria; inoltre essa è svalutata dal progresso trionfale delle teorie matematiche, nate nei secoli successivi; per cui non è da essa che i didatti si aspettano suggerimenti per comprendere meglio i FdM della Matematica tutta. Vediamo bene che i didatti della Matematica *non potevano dedicare attenzione ai veri fondamenti della matematica tutta*, oltre quelli della vulgata sulla Matematica dell'antichità: OA e riga e compasso e teoria numerica. Ma, secondo la vulgata, ambedue gli strumenti sono sorpassati dal progresso moderno; e l'OA della geometria, che un secolo fa è stata esaltata da Hilbert, sappiamo che oggi appare insufficiente (a causa del teorema di Gödel).

In totale, si nota che *la DdM presenta ognuna di queste teorie matematiche in maniera (oltre che molto parziale) sfalsante i fondamenti delle teorie*.

Essa non presenta mai la coppia delle scelte di una teoria, o perché in ogni teoria fa una tale confusione tra le quattro possibili scelte che non si può nemmeno intuire che ce ne sono due sole; o perché, quando ne sottolinea una (la OA della Geometria euclidea) tratta l'IP come una possibilità, ma legata a strumenti e metodi del passato; la modernità starebbe nel superamento dell'IP, senza più curarsi della incommensurabilità dei Greci; e così passare a conquistare l'IA, cioè l'IA della Matematica dal 1700 in poi, che così costituirebbe l'indirizzo guida per capire i FdM (ma come indirizzo di ricerca o come parte dei FdM?). Quindi la DdM non dà modo di capire se nella Matematica ci sia un fondamento maggiore dell'OA, per di più concepito solo come modello ideale di organizzazione, non come una scelta. Cioè la DdM non riesce a superare in nessun modo la soglia di riconoscere due scelte in una sola teoria. In altri termini, la DdM ha una falsa coscienza dei FdM: o arretrata al primo programma di Hilbert, o ha una visione confusa di essi. Ne concludiamo che la DdM *è astratta*, non solo nel senso che dalla realtà concreta astrae i suoi concetti (ad es. il punto e il cerchio in geometria), ma anche nel senso che è *astratta dai suoi fondamenti*, fino al punto di esserne *separata*.

In definitiva, l'insieme delle teorie matematiche insegnate non ha una sua unità o una sua logica; corrisponde più o meno ad una scelta sulle teorie più vecchie e meno tecniche; cioè risponde ad esigenze pratiche di presentare un po' tutte le teorie che nella Storia della Matematica hanno preceduto l'Analisi infinitesimale, quella teoria che viene considerata il grande avanzamento della Matematica moderna; ma, che nello stesso tempo, è il "mostro tecnico" per la DdM, le sue "Colonne d'Ercole".

[1] A. Drago: *Le due opzioni*, La Meridiana, Molfetta BA, 1991.
[2] A differenza di quanto invece hanno potuto fare i didatti della Fisica ("Lo schema paradigmatico della didattica della Fisica: la ricerca di un'unità tra quattro teorie", *Giornale di Fisica*, **45** n. 3 (2004) 173-191) e della Chimica (C. Bauer e A. Drago: "Didattica della chimica e fondamenti della scienza", *Atti XI Conv. Naz. Storia e Fondamenti della Chimica, Acc. Naz. Sci. XL*, 123, vol. 29, 2005, 353-364).

[*] drago@unina.it

Saggio sulla distribuzione Normale
Parte I

di Luciano Corso

L'origine della funzione di densità normale è piuttosto incerta e in ogni caso – nell'interpretazione generale che le attribuiamo noi oggi – essa ha avuto uno sviluppo concettuale di almeno 200 anni. Va ricordato che già in Galileo Galilei (1564 – 1642) si trova una nota significativa della distribuzione degli errori di misurazione. Egli, infatti, fissa in tre punti le caratteristiche tipiche di questi errori: 1) i piccoli errori (scarti) sono più frequenti di quelli grandi; 2) gli errori sono simmetricamente distribuiti intorno al "valore vero" da misurare; 3) la maggior parte delle osservazioni sperimentali sono concentrate vicino al "valore vero". Queste tre osservazioni concordano con l'ipotesi di una distribuzione degli errori di misura di tipo Normale [B.11]. Si sostiene, inoltre, che già il francese Blaise Pascal (1623 - 1662) ne avesse intuito la forma [B.1]: nel triangolo aritmetico, infatti, si potrebbe già pensare ciò che potrebbe capitare con il suo sviluppo nel continuo (con $n \to \infty$) alla funzione dei coefficienti binomiali [B.6]

$$f : k \to \binom{n}{k} \quad , \quad con\ k \in \boldsymbol{IN}\ , n < \infty\ . \tag{1}$$

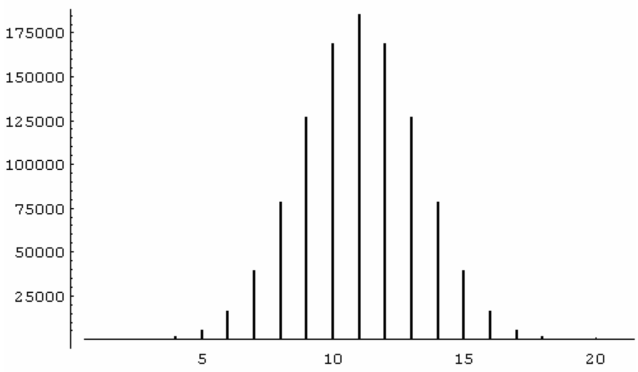


Fig. 1. Rappresentazione grafica della funzione (1) dei coefficienti binomiali.

Johann Heinrich Lambert (1728 - 1777), nel 1755, arriva alle stesse conclusioni di Galilei e aggiunge che 4) il valore massimo della distribuzione degli errori corrisponde all'asse di simmetria della curva, 5) la curva ha due punti di flesso ed 6) è asintotica all'asse delle ascisse. Le idee di base per una descrizione formale della curva ci sono già. Dobbiamo attendere, però, De Moivre, Laplace, Gauss, Quételet, Galton, Lyapunov, KhinCin e Lindeberg-Lévy per comprendere completamente la sua portata semantica.

L'intuizione e il percorso di De Moivre

La convergenza della distribuzione binomiale (schema delle prove ripetute e bernoulliane, cioè statisticamente indipendenti) alla distribuzione normale, è stata per la prima volta dimostrata nel 1733, almeno dai documenti oggi disponibili, dal francese Abraham De Moivre (1667 – 1754) che ha usato, per far ciò, l'approssimazione dello scozzese James Stirling (1692 – 1770), per n finito, nata dal limite notevole

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^n \cdot \sqrt{2\cdot\pi\cdot n}}{e^n \cdot n!} = 1\ . \tag{2}$$

La dimostrazione di De Moivre è riportata in [B.2] partendo, appunto, dalla

$$n! \approx n^n \cdot e^{-n} \cdot \sqrt{(2\cdot\pi\cdot n)} \tag{3}$$

che troviamo dimostrata in [B.3]. Ricordo che l'espressione di destra sottostima $n!$ (Si provi mediante il software applicativo MATHEMATICA la conferma sperimentale di questa affermazione). In sostanza De Moivre arriva ad affermare che:

$$P(x) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot q^{n-x} \approx \frac{e^{-\frac{z^2}{2\cdot n\cdot p\cdot q}}}{\sqrt{2\cdot\pi\cdot n\cdot p\cdot q}}\ , \tag{4}$$

nel caso in cui $p \approx q$, n sia (abbastanza) grande e $z = x - n{\cdot}p$ [B. 15]. La scoperta degli scritti di De Moivre, andati perduti dopo la sua morte, è dovuta a un eminente statistico-matematico del Novecento: l'inglese Karl Pearson (1857 – 1936). Egli nel 1924 trovò gli scritti e annunciò che il primo a raggiungere la formulazione della Normale fu De Moivre.
De Moivre dovette rifugiarsi a Londra per motivi politici e lì conobbe parecchi matematici inglesi: tra questi Thomas Simpson (1710 - 1761) e J. Stirling. De Moivre, prima di arrivare alla (4), trovò, per n grande, la relazione

$$\frac{2}{B\cdot\sqrt{n}} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n , \tag{5}$$

con B incognito. Scoperse che B, affinché essa fosse una probabilità, doveva avere uno sviluppo logaritmico del tipo:

$$Ln(B) = 1 - \frac{1}{12} + \frac{1}{360} - \frac{1}{1260} + \ldots \tag{6}$$

Fu lo stesso Stirling a dimostrare che ciò poteva essere vero solo se $B=\sqrt{(2\cdot\pi)}$ (Si veda [B.14] per giustificare la (6)).
Quest'ultimo e De Moivre [B.13], partendo dalla formula di John Wallis [1616 - 1707]

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to+\infty} \left[\left(2^{4n}(n!)^4\right) \Big/ \left([(2n)!]^2 (2n-1)\right)\right] \tag{7}$$

e considerando che la (3) poteva essere scritta come
$n! = n^n \cdot e^{-n} \cdot \sqrt{(2\cdot\pi\cdot n)} \cdot \varphi(n)$,
sostituendo e riducendo trovarono:

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2(2n-1)} \cdot \frac{[\varphi(n)]^4}{[\varphi(2n)]^2} = \frac{1}{4}\varphi^2(\infty) \tag{8}$$

cioè $\varphi(\infty) = \sqrt{(2\pi)}$. Questo termine lo ritroviamo in (4), al denominatore, come costante di normalizzazione.

Oggi la dimostrazione di questo risultato avviene tramite il calcolo dell'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx\ , \tag{9}$$

trasformando in coordinate polari la funzione integranda.
Posto, infatti,

$$l_x = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx \qquad \text{e} \qquad l_y = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy$$

segue:

$$l_x \cdot l_y = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)} dx \cdot dy\ . \tag{10}$$

Considerando che $x = \rho{\cdot}cos(\alpha)$ e $y = \rho{\cdot}sen(\alpha)$ e che lo Jacobiano della trasformazione dei differenziali $dx{\cdot}dy$ è $\rho{\cdot}d\rho{\cdot}d\alpha$ l'ultima espressione diventa:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)} dx \cdot dy = \int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{\rho^2}{2}} \cdot \rho \cdot d\rho \cdot d\alpha =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\alpha \cdot \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\rho^2}{2}} \cdot \rho \cdot d\rho = \alpha\Big|_0^{2\pi} = 2\pi \cdot 1 = 2\pi$$

e quindi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = \sqrt{2\cdot\pi}\ . \tag{11}$$

A questo punto osservo che la densità di probabilità normale, in forma standardizzata, è determinata. [*Segue al numero* 131]