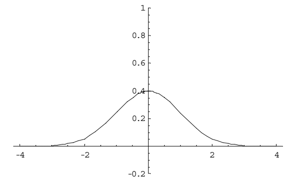
MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore: Luciano Corso - Redazione: Luciano Corso, Elisabetta Capotosto, Carlo Marchiori – Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – 338 6416432
e-mail: lcorso@iol.it – Stampa in proprio – Numero 131 – Uscito il 15 – 12 – 2008



Saggio sulla distribuzione Normale
Parte II

di Luciano Corso

[*Segue dal numero* 130] Basta, infatti, dividere $Exp[-x^2/2]$ per il suo fattore di normalizzazione. Cioè:

$$N_X(0,1) = \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} . \qquad (12)$$

Il passaggio successivo è quello di generalizzare la distribuzione Normale. Partendo da (4) e da (12) l'operazione non è scontata. Per far ciò, infatti, si deve usare il concetto di standardizzazione. Posto $U = (x-\mu)/\sigma$ e considerando che $dU = (1/\sigma)\cdot dx$, dalla funzione di ripartizione si ottiene:

$$F_U(u) = P(U \le u) = \int_{-\infty}^{u} \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot e^{-\frac{U^2}{2}} \cdot dU$$

e sostituendo si ottiene:

$$F_X(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\cdot\sigma^2}} \cdot \frac{1}{\sigma} \cdot dx$$

e, infine, la densità:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\cdot\sigma^2}} , \qquad (13)$$

definita per ogni $x \in \boldsymbol{IR}$ e $\sigma \in \boldsymbol{IR}^+$.
La rappresentazione grafica in coordinate cartesiane di (12) e (13) è la seguente:

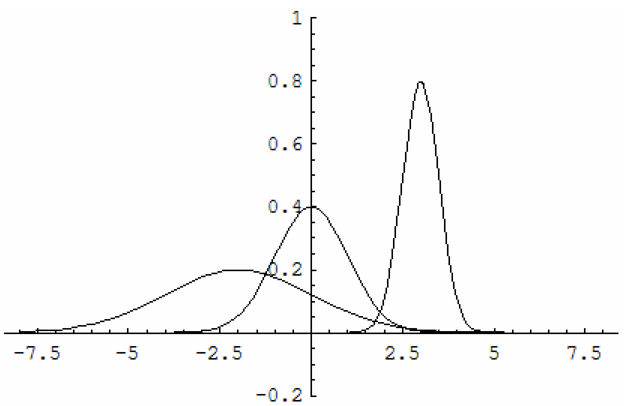


Fig. 1. Rappresentazione in coordinate cartesiane delle funzioni (12) e (13); partendo da sinistra, rispettivamente del tipo $N_X(-2,2)$, $N_X(0,1)$, $N_X(3,0.5)$. Elaborazione svolta con MATHEMATICA.

Questa generalizzazione, però, appare per la prima volta dopo il 1808 e non è da attribuire a De Moivre. Non è neppure da attribuire a Laplace il quale la usa in questa forma solo nel 1810 (alcuni storici pongono la data del 1812).

Oggi si studia il teorema di De Moivre-Laplace che non è altro che la conferma formale della corretta intuizione di De Moivre (per la dimostrazione moderna del teorema si veda [B.5]). Occorre osservare che il teorema cui ci riferiamo, partito dalla dimostrazione di De Moivre, poco nota al suo tempo e poi andata perduta alla sua morte, è stato successivamente dimostrato da Laplace nel 1778 nella versione di De Moivre, e generalizzato per un p qualunque, sempre da Laplace, nel 1812. Sappiamo che, precedentemente e parallelamente a Gauss, in Francia Pierre-Simon De Laplace (1749 – 1827), nel 1783, usò la distribuzione Normale, nella forma (12), come modello interpretativo della distribuzione degli errori di misura, ma senza giustificare adeguatamente la ragione di tale uso. In base a quanto qui riportato, risulta che la distribuzione Normale nella formulazione cui sono pervenuti De Moivre e Laplace sia il risultato di una dimostrazione del *Teorema del limite centrale* applicato al caso particolare della prove ripetute e bernoulliane (distribuzione binomiale).

Il contributo di Robert Adrian

Robert Adrian (1775 – 1847), matematico anglo-americano, nel 1808, con un anticipo di un anno sulla pubblicazione di Gauss, pubblica un lavoro in cui la Normale è descritta dall'equazione:

$$U = e^{a_1 + \frac{m\cdot x^2}{2\cdot a}} . \qquad (14)$$

Egli chiama la (14) «l'equazione generale della curva di probabilità». Prova, inoltre, che $m < 0$. Il risultato ottenuto da Adrian rappresenta una generalizzazione di un problema di probabilità che egli affrontò in quegli anni [B.11], sempre legato a un problema di errori di misura. Più di così non viene detto del lavoro di Adrian e quindi, considerando la (14), possiamo ipotizzare che anche Adrian non abbia dimostrato un controllo compiuto nell'arrivare alla (12).
[*Segue al numero* 132]]

Durante il congresso nazionale della Mathesis tenutosi a Lecce dal 5 all'8 dicembre 2008, presso la Facoltà di Lingue, ho fatto una comunicazione, in data 7 dicembre, riguardante questo breve saggio sulla distribuzione normale.

Modellizzazione dell'economia: la nascita dei marginalisti

di Luciano Corso

Sull'onda delle nuove analisi economiche sorte dopo i lavori di Karl Heinrich Marx (1818 – 1883), un filone nuovo di studi economici portò verso un approfondimento delle regole che governano l'economia. Da questo filone non vennero più accettate le analisi descrittive fatte dai classici e si sviluppò un orientamento di studi basato su un'analisi quantitativa dell'economia. Intorno al 1870 nacque di fatto l'econometria qui intesa come quella consistente parte dell'economia su cui è possibile applicabile la matematica.

Gli studiosi appartenenti a questa corrente presero il nome di *Marginalisti* perché il fondamento della loro analisi economica era l'utilità marginale dei beni economici, cioè la derivata prima della funzione dell'utilità al variare della quantità di bene consumato. Svilupparono la teoria del valore (Carl Menger); in particolare formularono una tesi in controtendenza rispetto alla scuola classica (Adam Smith [1723 – 1790] economista e filosofo scozzese, David Ricardo [1772 – 1823] economista britannico, Karl Marx): è il valore del prodotto che definisce il valore dei fattori produttivi e non viceversa. L'utilità marginale di un bene ne caratterizza il suo valore e per determinare tale utilità occorre usare metodi matematici. Sono i calcoli di convenienza economica a definire la portata del successo nel reperimento efficiente delle risorse.

La scuola marginalista orienta l'economia verso studi dove la matematica diventa determinante per interpretare i fenomeni economici. La matematica viene così applicata alla teoria dell'equilibrio economico, sia micro, sia macro, e alla efficienza dei processi di allocazione delle risorse (commercio). La scuola, costituita da eminenti economisti e scienziati del tempo (Carl Menger, Léon Walras, Alfred Marshall), si sviluppa dal 1870 al 1890 circa e applica il calcolo infinitesimale allo studio dell'utilità, dei costi, dell'efficienza produttiva, degli sprechi. Un esponente di spicco della scuola marginalista fu Vilfredo Federico Damaso Pareto (1848 – 1923) di origine italiana. Egli applicò modelli matematici allo studio della distribuzione dei redditi tra gli individui di una data società. Il modello di Pareto – si veda la sua espressione analitica nella nota alla figura 3 e [B.1] – è ancora valido e studiato in economia e in statistica. I marginalisti ritenevano che l'economia fosse analizzabile, come la fisica, mediante l'analisi matematica, la geometria e la statistica applicate ai problemi del mercato. Oggi l'econometria rappresenta il vero filone scientifico dell'economia. I marginalisti vennero criticati dagli economisti della scuola classica per il loro approccio meccanicistico allo studio dei bisogni e dei beni economici umani. In particolare non si accettava il loro metodo logico-deduttivo a partire da principi osservati in natura, la loro spinta razionalità. In realtà il filone marginalista aveva una forte base sperimentale e i principi economici da cui partiva venivano indotti dal comportamento economico degli individui, che si poteva sperimentare attraverso l'analisi della vita sociale e le osservazioni sui mercati.

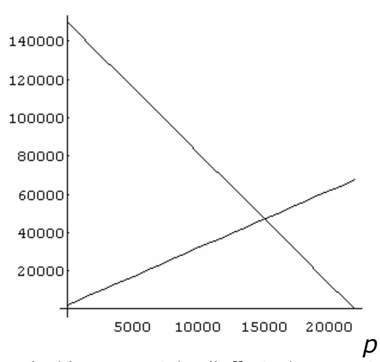


Fig. 2. La domanda (decrescente) e l'offerta (crescente) di un bene economico in funzione del prezzo di mercato (p). Il prezzo di equilibrio del mercato si ha là dove la domanda incontra l'offerta. L'approccio lineare viene accettato se l'analisi è fatta per brevi archi di tempo. Prima della scuola marginalista, in generale, le teorie sull'equilibro dei mercati erano solo di tipo descrittivo. Con tale scuola si afferma l'importanza dell'uso della matematica per l'economia.

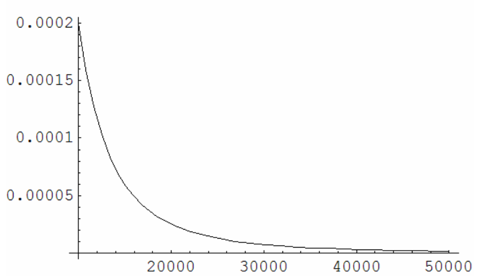


Fig. 3. La funzione di densità di frequenza dei redditi a partire da un reddito minimo (nel nostro caso x_0=10000 *euri*), secondo Pareto. Il modello rappresenta un salto di qualità nei processi di descrizione dei fenomeni economici. Il modello, analiticamente, viene espresso dall'equazione: $f(x) = (a / x_0)\cdot(x_0 / x)^{a+1}$, $\{x \mid x \in \mathbb{R}^+, a > 0\}$. La funzione di ripartizione di x è data da: $F(x) = 1 - (x_0 / x)^a$ per $x > 0$ e $F(x) = 0$ altrove.

Bibliografia: [B.1] Vajani Luigi, *Statistica descrittiva*, ETAS LIBRI, Milano, 1974. [B.2] De Maria Giovanni, Trattato di Logica Economica Vol. I e II, CEDAM, Padova, 1962

Considerazioni sull'induzione

Induzione deriva dal latino *in ducere* che significa «condurre, portare dentro» e consiste in quel processo mentale che consente di passare da poche osservazioni sperimentali a una regola generale che governa il fenomeno osservato.

L'induzione naturale venne studiata dall'empirista David Hume (1711 - 1776) il quale affermò che il processo induttivo nasce dall'esperienza e consiste nel generalizzare una regolarità riscontrata nelle osservazioni empiriche. «Nel far ciò, però, si commette un errore di presunzione. Affermare che *A* è causa di *B* non può certo voler dire che *B* sia deducibile da *A*, altrimenti si potrebbe anche sostenere che *B* sia già contenuto implicitamente in *A*. Ma se ciò fosse vero, allora l'effetto sarebbe già contenuto nella causa, mentre ciò, proprio per esperienza, non appare. L'effetto ha sempre qualcosa di diverso dalla causa. La causa è solo un abito della nostra mente nato dall'abitudine, dal consolidamento di convinzioni. Sono queste che ci fanno concludere che se in futuro osserviamo *A*, allora ci attendiamo che accada *B*. Nessuno però può dimostrare che la nostra attesa sia valida». Hume mette in discussione l'idea che le conoscenze umane possano essere rigorosamente certe. «È solo la matematica che può fornire risultati certi, ma fuori di essa solo il probabile è lecito. Le verità della matematica, però, sono verità di ragione, non verità di fatto. Il grado di verità delle tesi delle scienze naturali è dato dal grado di probabilità che scaturisce dalla frequenza statistica con cui si riscontrano nell'osservazione sperimentale. È la statistica che può dare "credenze" valide. La abitudini, invece, falsificano le idee e le considerazioni sulla verità». Queste idee di Hume sull'induzione aprono un filone di indagine che scaturisce nel Novecento in quello che oggi si chiama induzione probabilistica (o inferenza statistica).

Dopo la crisi della logica classica, dovuta ai lavori di Gödel e di Turing, e l'affermarsi del principio di indeterminazione di Eisemberg e Schrödinger si cercarono nuovi supporti critici a sostegno delle affermazioni scientifiche. Un filone importante di questo tentativo venne dall'induzione probabilistica. Essa si basa sui seguenti principi (Jerzy Neyman-Karl Pearson):

3.1) il fondamento della conoscenza sono le osservazioni sperimentali (Galileo);

3.2) la fase cognitiva si basa su 2 stati percettivi: ciò che è (l'essere, lo stato di natura) e ciò che si dichiara riguardo all'essere (ipotesi sullo stato di natura);

3.3) si verifica lo stato di natura, sulla base delle ipotesi fatte e dei risultati degli esperimenti;

3.4) si assegna alle dichiarazioni fatte una probabilità che siano vere (livello di affidabilità).

Per quanto grande sia il numero delle prove fatte, n_k, in k esperimenti, esso non esaurisce tutti i casi possibili e perciò ogni dichiarazione sullo stato di natura, si deve necessariamente basare su una carenza d'informazioni. Con il principio di induzione probabilistica finisce la necessità di una logica dicotomica di tipo aristotelico (con valori di verità "vero" o "falso"); si entra in una nuova dimensione interpretativa del concetto di conoscenza: si accetta di poter conoscere un fenomeno con un certo grado di fiducia sulle affermazioni fatte, escludendo che queste affermazioni siano vere con assoluta certezza.

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">TABELLA 1</td><td colspan="2">STATO DI NATURA</td></tr>
<tr><td>Ω_0</td><td>Ω_1</td></tr>
<tr><td rowspan="2">IPOTESI</td><td>H_0</td><td>$H_0 \mid \Omega_0$</td><td>$H_0 \mid \Omega_1$</td></tr>
<tr><td>H_1</td><td>$H_1 \mid \Omega_0$</td><td>$H_1 \mid \Omega_1$</td></tr>
</table>

In tabella 1 si ha, con k =0 o 1: H_k = «dichiaro che è vero lo stato k»; Ω_k = «è vero lo stato k». Si può notare che in ogni processo decisionale inferenziale, sono associati 2 tipi di errori: $H_1 \mid \Omega_0$ e $H_0 \mid \Omega_1$.. Questi 2 errori sono ineliminabili e la probabilità di commeterli misura la forza di un test inferenziale, secondo la teoria classica dell'inferenza statistica. (*L.Corso*)

Bibliografia: [B.1] Alberto Mura, *Dal noto all'ignoto. Causalità e induzione nel pensiero di David Hume*, Il Mulino, Bologna, 1998; [B.2] Bertrand Russell, La saggezza dell'Occidente, Longanesi e C., Milano, 1961. [B.3] Taro Yamane, *Statistics, An Introductory Analysis*, Harpen International Edition, New York, 1973