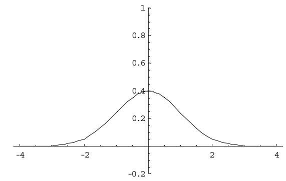
MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore: Luciano Corso - Redazione: Luciano Corso, Elisabetta Capotosto, Carlo Marchiori – Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – 338 6416432
e-mail: lcorso@iol.it – Stampa in proprio - Numero 135 – gennaio 2009 – Uscito il 6 – 03 - 2009



Saggio sulla distribuzione Normale
Parte IV

di Luciano Corso

[*Segue dal numero* 132]

Critiche alla dimostrazione di Gauss

La dimostrazione di Gauss (*MatematicaMente n.*132, [B.9], [B.19]) non è immune da critiche. Riporto quelle (tratte da G. Castelnuovo), che anche a me appaiono significative.

1) Gauss ottiene la dimostrazione basandosi su ipotesi che, pur essendo ragionevoli, potrebbero essere sostituite da altre ipotesi, altrettanto ragionevoli, che potrebbero condurre ad altri risultati [B.16].

2) Gauss attribuisce la massima densità di probabilità a posteriori alla media aritmetica campionaria $\bar{x}$. Ciò viene ritenuto arbitrario in quanto lo stesso massimo potrebbe, sempre ragionevolmente, essere assegnato a qualsiasi altra media (per esempio, la moda). Bertrand, per esempio, ritiene che alla media $\bar{x}$ non debba corrispondere la massima densità di probabilità, bensì che tale media coincida con x, media aritmetica della popolazione X delle misure della grandezza incognita (x appunto).

3) Il fatto di postulare che la densità a posteriori è massima in corrispondenza della media $\bar{x}$ del campione, comporta che la densità a priori $\omega(x)$ della grandezza ignota non può essere altro che uniforme. Ogni altra distribuzione a priori si dimostra essere incompatibile con il postulato della media. Infatti, se n misure di X hanno dato risultati uguali, cioè se $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$, la (21) (si veda MatematicaMente n. 132) diventa:

$$\Pi(x) = C_0\, \omega(x)\, [\varphi(x - x_1)]^n. \qquad (36)$$

Il massimo di $\Pi(x)$ si ha là dove $x = x_1$. Passando al logaritmo, derivando rispetto a x, e ponendo il tutto uguale a zero si ottiene:

$$\ln(\Pi(x)) = \ln(C_0) + \ln(\omega(x)) + n \cdot \ln(\varphi(x - x_1)) \qquad (37)$$

$$\frac{1}{\omega(x)} \cdot \omega'(x) + n \cdot \frac{1}{\varphi(x - x_1)} \cdot \varphi'(x - x_1) = 0 \qquad (38)$$

$$\frac{1}{\omega(x_1)} \cdot \omega'(x_1) + n \cdot \frac{1}{\varphi(0)} \cdot \varphi'(0) = 0\,. \qquad (39)$$

Per ogni valore di x_1 e n, ciò è possibile solo se vi è indipendenza tra $\omega(x_1)$ e x_1.

4) Infine, alcuni sostengono (per esempio Bertrand) che la probabilità di commettere un certo errore $z_i = x - x_i$ non dipende esclusivamente dall'ampiezza dell'errore, ma dipende sia dal vero valore ignoto x , sia dalla misura ottenuta x_i.

Nonostante queste critiche la dimostrazione di Gauss risulta essere una pietra miliare per comprendere l'origine della Normale.

Il contributo di Laplace

Laplace ebbe il merito di intuire che la distribuzione Normale poteva essere considerata una distribuzione degli errori di misura, indipendentemente dalla sua origine. Si ritiene che egli, in Francia tra Il 1780 e il 1783, precedentemente e poi in parallelo a Gauss, abbia intuito che la distribuzione Normale, nella forma (11), potesse servire come modello interpretativo della distribuzione degli errori di misura, ma non giustificò adeguatamente la ragione di tale uso. Questa sua intuizione, per quanto ne sappiamo noi, non venne mai sviluppata in un processo analitico idoneo a giustificare questo risultato che, invece, nella sua forma più generale e organica pare debba essere attribuito al matematico tedesco Friedrich Wilhelm Bessel (1784-1846) che lo raggiunse nel 1838 [B.17]. Tuttavia, Laplace stesso, in un suo lavoro pubblicato nel 1810, cita Gauss come autore della distribuzione nella sua formulazione generale [B.9 pag. 206]. Inoltre Laplace, partendo dal risultato di Gauss, successivamente migliorò la dimostrazione giustificandone meglio alcuni passaggi, e percorrendo la strada di una dimostrazione che parte da una probabilità a priori, non bayesiana. [*Segue al numero* 137]

THEORIA
MOTUS CORPORUM
COELESTIUM

IN

SECTIONIBUS CONICIS SOLEM AMBIENTIUM

AUCTORE

CAROLO FRIDERIGO GAUSS

HAMBURGI SUMTIBUS FRID. PERTHES ET I. H. BESSER

1809.

Venditur

PARISIIS ap. Treuttel & Würtz. LONDINI ap. R. H. Evans.
STOCKHOLMIAE ap. A. Wiborg. PETROPOLI ap. Klostermannn.
MADRITI ap. Sancha. FLORENTIAE ap. Molini, Landi & C.
AMSTELODAMI in libraria: Kunst- und Industrie-Comptoir, dicta.

1

Fig. 1. Frontespizio dell'opera di Gauss in cui appare, quasi come se fosse un'appendice, il lavoro sulla distribuzione degli errori di misura che portò alla densità di probabilità Normale. Gauss disserta (in latino) su questo argomento nel Libro II, Sezione III, paragrafo 175, a partire dalla pagina 240, dell'opera sopracitata. Tratto da: GDZ – Göttinger Digitalisierungszentrum – Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek – Goettingen – Germany
email: gdz@sub.unigoettingen.de

Ringrazio il collega Alberto Guerrini per la revisione di questo articolo

OCCHIO! *L'accesso ai file di MatematicaMente, posti nel sito Mathesis presso l'Università degli Studi di Verona, è permesso solo per ragioni di studio o di ricerca. Nessuna parte della rivista può essere usata senza citazione della fonte. Non è consentito l'uso anche solo di parti della rivista per scopi di profitto senza il permesso della Mathesis – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche, sezione di Verona.*

Sulla gravità repulsiva

di Vincenzo Zamboni [*]

La forza applicata dalla particella i alla particella k può essere indicata come: $f(i, k) = m(k)\ a(i, k)$, in cui i e k sono indici. Essi indicano punti dello spazio (ciò renderà più semplice descrivere le interazioni in termini di "campo"); esempio: $m(i)$ = massa nel punto (i).

Vettorialmente:

$$f(i,k)\ u(i,k) = m(k)\ a(i,k)\ u(i,k) \quad (1)$$

con $u(i,k)$ versore (vettore unitario) diretto dal punto (i) al punto (k) e $(u(i,k))^2 = 1$.

Perciò, il modulo della accelerazione che la particella i provoca sulla k è $a(i,k) = f(i,k) / m(k)$.

Ricordando che ciò che osserviamo direttamente sono le accelerazioni (e, non a caso, Mach riformulò la definizione di massa basandosi solo su di esse), per il caso gravitazionale newtoniano si otterrà:

$$g(i,k) = - G\cdot m(i) / (r(i,k))^2 \quad (2)$$

e per la interazione elettrostatica coulombiana:

$$a(i,k) = (1/(4\cdot\pi\cdot\varepsilon))\cdot(q(k) / m(k))\cdot q(i)\cdot(1/(r(i,k)^2), \quad (3)$$

dove: $\pi \approx 3{,}1415$ e ε è la costante dielettrica del mezzo: $\varepsilon_0\ \varepsilon_r$.

Si noti che il rapporto q / m (che qui appare relativamente alla particella "sorgente") è caratteristico del tipo di particella (detto, a volte, la "firma" di una particella). Tenendo conto della possibilità di masse positive e negative, nel caso della accelerazione di gravità, $g(i,k)$, avremo due possibili segni: le masse "sorgenti" $m(i)$ positive generano sempre una accelerazione (un campo) negativo (cioè: attrattivo) sulle masse nei punti spaziali circostanti, mentre le masse negative generano sempre una accelerazione (campo) positiva, cioè repulsiva:

$m(i) > 0$ provoca sempre $g(i,k) < 0$, accelerazione attrattiva (discorde a $u(i,k)$) su $m(k)$; (4)

$m(i) < 0$ provoca sempre $g(i,k) > 0$, accelerazione repulsiva (concorde a $u(i,k)$) su $m(k)$.

È bene osservare quanto segue:

- l'interazione di due masse positive darà origine ad una interazione mutuamente attrattiva;
- l'interazione di due masse negative darà origine ad una interazione mutuamente repulsiva.
- l'interazione di una massa positiva con una negativa darà origine ad una accelerazione attrattiva (generata dalla «+» sulla «–») e a una repulsiva (generata dalla «–» sulla «+»).

È facile convincersene, inserendo la massa $m(i)$ (positiva o negativa che sia) nella (2), dove la costante G e il quadrato della distanza sono entrambi sempre positivi:

$$m(k)\cdot a(i,k) = m(k)\cdot g(i,k) = -G\cdot m(i)\cdot m(k) / (r(i,k))^2 \quad (5)$$

sicchè

$$a(i,k) = g(i,k) = - G\cdot m(i) / (r(i,k))^2 \quad (6)$$

e risulta evidente che la natura attrattiva o repulsiva del campo di accelerazione prodotto dipende solo dal segno della massa "sorgente", $m(i)$. Questo è un punto importante.

Ciò non contraddice il principio di azione e reazione. Vale in tutti i casi $f(i,k) = -f(k,i)$, dal momento che $f(i,k) = m(k)\cdot a(i,k)$, e il segno delle forze è determinato da entrambe le masse (mentre il segno delle accelerazioni è determinato solo dalla "massa sorgente").

Generalmente parlando, dunque, le masse positive si attirano tra loro, le masse negative si respingono tra loro. Questo fatto dovrebbe essere considerato come possibile origine di espansione dell'universo, dato che, secondo la teoria di Dirac, gli autostati a energìa (ovvero massa, ovvero frequenza) negativa sono saturi (tutti occupati), sicchè le masse negative sarebbero un "sottofondo infinito" di massa del nostro universo), mentre le masse di segno diverso danno origine a due accelerazioni concordi, entrambe concordi al versore che va dalla massa «–» alla massa «+» (questo caso, però, merita una trattazione a parte).

L'applicazione di questa teoria ad un semplice modello simmetrico di universo sferico fornisce risultati interessanti: le masse positive si attraggono, mentre il "sottofondo spaziale", saturo di masse negative "invisibili" si espande, con accelerazione progressivamente crescente, allontanandosi dal centro della distribuzione (risultato che può essere mostrato in un secondo tempo). Il caso di due masse dello stesso segno, ma eguali in modulo (valore assoluto) origina due accelerazioni eguali; il caso di due masse di segno opposto, e diverse in modulo (valore assoluto), origina due accelerazioni concordi, una maggiore dell'altra: la massa "minore" (in modulo) viene accelerata di più di quella "maggiore" (in modulo). Dunque, la "minore" (in modulo) precipita sulla "maggiore" (in modulo), se quest'ultima è positiva; ne viene allontanata, invece, se la "maggiore" è negativa.

Il ragionamento esposto si può ripetere per il caso delle interazioni elettrostatiche coulombiane, tenendo conto del fatto che, questa volta, il segno della accelerazione prodotta dipende da tre fattori: $a(i,k)$ dipende, infatti, da $m(k)$, $q(k)$, $q(i)$. Per conseguenza, i due possibili tipi di accelerazioni prodotte, negativa (attrattiva) e positiva (repulsiva) dipenderanno dalle otto ($2^3 = 8$) possibili combinazioni dei segni di $m(k)$, $q(k)$, $q(i)$.

Grazie alla teoria di Dirac, il "vuoto" dei fisici manifesta una natura nuova ("*in this theory, vacuum acquires physical properties, i.e., it is filled with electrons in a negative energy states*", Kitaigorodsky, op. cit., pag 561, nella edizione inglese del 1976). Si tratta di un vuoto apparente, in realtà pieno di particelle a massaenergìa negativa, la cui presenza generalmente non è evidente, poichè viene osservata nelle produzioni ed annichilazioni di coppia. Tuttavia, questo spazio "apparentemente vuoto, ma in realtà pieno", può rivelarsi origine di molti altri fenomeni. Ad esempio, la repulsione reciproca tra le particelle del mare di massenergìe negative può rivelarsi causa della espansione dell'universo. In questa descrizione, le masse positive si attraggono reciprocamente, immerse in un "mare" che si espande, per gravità repulsiva.

Lungi dal considerarla una descrizione esauriente, cionondimeno, essa ha già prodotto alcuni risultati incoraggianti. Un semplice modello-base simmetrico di universo finito, con la forma di una sfera di masse negative, tra le quali si muovono, in minor numero, le positive, mostra un universo in espansione, con accelerazione crescente man mano che ci si allontani dal centro di simmetria. Naturalmente, il comportamento di ogni modello ipotetico di universo deve essere, poi, confrontato con i dati sperimentali accessibili.

[*] vincenzo.zamboni@gmail.com , Socio Mathesis, Docente di Fisica all'Istituto G. Giorgi di Verona

Bibliografia: [B.1] A. Einstein, *Il significato della relatività*, Newton Compton Ed., Roma, 1997. [B.2] Aleksander Kitaigorodsky, *Introduction to Phisic* , Mir Publishers, Moscow, 1963, specialmente ai par. 216 (*Relativistic theorie of electron*), 217 (*Creation and annichilation of pair of particles*). [B.3] Paul A. M. Dirac, *I principi della Meccanica Quantistica*, ed. it. Bo-ringhieri, Torino, 1969. [B.4] Lev D. Landau, *Teorìa dei Campi* (Fisica Teorica 2), Editori Riuniti, Roma, 1976. [B.5] Robert Resnick, *Introduzione alla Relatività ristretta*, C.E.A., Milano, 1976. [B.6] Max Born, *Fisica Atomica*, ed it. Boringhieri, Torino, 1968, specialmente al par.15 (*Raggi cosmici e positroni*), e 44 (*Teoria ondulatoria dell'elettrone*). [B.7] Vincenzo De Santis, *Lezioni di Meccanica Quantistica*, Fascicoli, Università degli Studi di Bologna, Bologna, 1982.

I Mandarini ci sono anche qui

(di *Luciano Corso*) Ai figli dei mandarini cinesi veniva insegnata l'antica poesia cinese (in un cinese arcaico, ancora più complesso di quello del tempo!) e non già perché servisse a qualcosa, bensì per creare una netta separazione tra il popolo, i suoi bisogni, le sue aspirazioni, e la casta dominante. I nobili infatti – come è noto – non hanno necessità di conoscere scienza e tecnologia, possono vivere lo stesso anche solamente disquisendo sui lirici greci o sul valore gnoseologico del concetto di « ψυχή ». I nobili di tutti i regimi e gli addetti di tutte le caste, i capi di ogni popolo, non hanno bisogno, di lavorare per vivere. «In natura non esiste zentil omo che lavori corporalmente» – diceva un vecchio detto al tempo della ormai decadente Repubblica di Venezia. Ciò rimane l'indirizzo dei padri e delle madri delle migliori famiglie borghesi e piccolo borghesi di tutto il mondo. In Italia, recentemente, si è assistito a una invasione di «Mandarini», ovunque, camuffati ovviamente. È un bel esercizio trovarli.