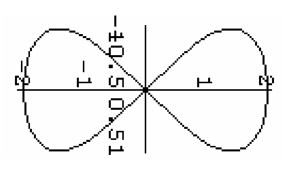
MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore: Luciano Corso - Redazione: Luciano Corso, Elisabetta Capotosto, Carlo Marchiori – Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – 338 6416432
e-mail: lcorso@iol.it – Stampa in proprio - Numero 136– febbraio - uscito il 27 – 03 – 2009



Un problema di geometria proiettiva

di Magnarelli Nazario [*]

Nello spazio riferito ad un sistema cartesiano ortogonale monometrico $O(x,y,z)$ si considerino il piano $z = 0$ e il piano improprio. Scrivere le equazioni della proiettività tra questi due piani che all'origine O, al punto improprio dell'asse x, al punto improprio dell'asse y e al punto $U(1,1,0)$ del piano $z = 0$, fa corrispondere ordinatamente sul piano improprio i seguenti elementi: il punto improprio dell'asse delle z, il punto improprio dell'asse delle x, il punto improprio dell'asse delle y e il punto improprio U' di coordinate cartesiane omogenee $(1, -1, 1, 0)$.
Se P'_∞ è il corrispondente di un punto P del piano $z = 0$, nella detta proiettività, si consideri la retta r: PP'_∞ e il piano α per l'origine O e ortogonale alla retta r.
Scrivere l'equazione del luogo – che risulta una superficie F^3 del terzo ordine – descritto dal punto M comune alla retta r ed al piano α, al variare di P nel piano $z = 0$.

Soluzione [**]

Un punto proprio P del piano $z = 0$ ha coordinate omogenee $P(x_1, x_2, 0, x_4)$ e nel piano stesso ha le coordinate $P(x_1, x_2, x_4)$ rispetto al sistema di coordinate indotto da quello dello spazio. Ne segue che l'origine O, il punto improprio X_∞ dell'asse x, il punto improprio Y_∞ dell'asse y e il punto proprio $U(1,1,0)$ del piano $z = 0$ hanno, rispetto al sistema di coordinate indotto da quello dello spazio, le coordinate seguenti:

$O(0,0,1)$, $X_\infty(1,0,0)$, $Y_\infty(0,1,0)$, $U(1,1,1)$. (1)

(Notare: nel nostro caso, il punto $U(1,1,0)$ non è il punto improprio della retta $x - y + k = 0$ giacente sul piano xy, ma è un punto proprio dello spazio che giace sul piano $z = 0$).
Analogamente, un punto Q del piano improprio $x_4 = 0$ ha le sue coordinate omogenee spaziali $Q(l, m, n, 0)$, mentre le sue coordinate omogenee indotte nel piano improprio da quelle dello spazio sono $Q(l, m, n)$.
In questo piano improprio dello spazio, il punto improprio dell'asse z, il punto improprio dell'asse x, il punto improprio dell'asse y e il punto improprio $U'(1,-1,1,0)$ hanno rispettivamente le coordinate

$Z'_\infty(0,0,1)$, $X'_\infty(1,0,0)$, $Y'_\infty(0,1,0)$, $U'_\infty(1,-1,1)$. (2)

Facendo riferimento ai due sistemi di coordinate omogenee nei due piani considerati, la proiettività fa corrispondere le seguenti coppie di punti:

$$\begin{cases} O(0,0,1) \to Z'_\infty(0,0,1), & X_\infty(1,0,0) \to X'_\infty(1,0,0), \\ Y_\infty(0,1,0) \to Y'_\infty(0,1,0), & U(1,1,1) \to U'_\infty(1,-1,1). \end{cases} \qquad (3)$$

Generalizzando, possiamo dire che si hanno 4 terne di parametri corrispondenti del tipo

$(x_1, x_2, x_4) \to (l, m, n)$. (4)

Ora, le equazioni della più generale proiettività fra due punti corrispondenti dei due piani considerati sono

$$\begin{cases} \rho l = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{14}x_4\,, \\ \rho m = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{24}x_4\,, \\ \rho n = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{34}x_4\,. \end{cases} \qquad (5)$$

Nel nostro caso, la corrispondenza fra le quattro coppie di punti corrispondenti date dalle (1) dà luogo al sistema

$$\begin{cases} 0 = 0 + 0 + a_{14} \\ 0 = 0 + 0 + a_{24} & \leftarrow per\ O(0,0,1) \to Z'_\infty(0,0,1) \\ \rho_1 = 0 + 0 + a_{34} \\ \rho_2 = a_{11} + 0 + 0 \\ 0 = a_{21} + 0 + 0 & \leftarrow per\ X_\infty(1,0,0) \to X'_\infty(1,0,0) \\ 0 = a_{31} + 0 + 0 \\ 0 = 0 + a_{12} + 0 \\ \rho_3 = 0 + a_{22} + 0 & \leftarrow per\ Y_\infty(0,1,0) \to Y'_\infty(0,1,0) \\ 0 = 0 + a_{32} + 0 \\ \rho_4 = a_{11} + a_{12} + a_{14} \\ -\rho_4 = a_{21} + a_{22} + a_{24} & \leftarrow per\ U(1,1,1) \to U'_\infty(1,-1,1) \\ \rho_4 = a_{31} + a_{32} + a_{34}\,. \end{cases} \qquad (6)$$

Si vede subito che alcuni coefficienti del sistema sono nulli:

$a_{14} = a_{24} = 0$, $a_{21} = a_{31} = 0$, $a_{12} = a_{32} = 0$.

Tenendo conto di questi coefficienti nulli, si ha il sistema più semplice

$$\begin{cases} a_{34} = \rho_1 = \rho_4\,, \quad a_{11} = \rho_2 = \rho_4\,, \\ a_{22} = \rho_3 = -\rho_4\,. \end{cases} \qquad (7)$$

Poiché i coefficienti a_{ik} sono determinati a meno di un comune fattore di proporzionalità non nullo, possiamo porre $a_{34} = 1$.
Si ricava :

$$\begin{array}{l} \rho_4 = \rho_1 = \rho_2 = 1\,, \quad \rho_3 = -1 \\ a_{34} = 1\,, \quad a_{11} = 1\,, \quad a_{22} = -1. \end{array} \qquad (8)$$

Raccogliendo i risultati, i coefficienti a_{ik} del sistema (5) hanno i valori dati dal seguente prospetto:

$$\begin{array}{lll} a_{11} = 1 & a_{12} = 0 & a_{14} = 0 \\ a_{21} = 0 & a_{22} = -1 & a_{24} = 0 \\ a_{31} = 0 & a_{32} = 0 & a_{34} = 1. \end{array} \qquad (9)$$

Dalla tabella (9) si ricava che le equazioni della nostra proietti-vità sono:

$$\begin{cases} \rho l = x_1 \\ \rho m = -x_2 \\ \rho n = x_4\,, \end{cases} \qquad (10) \qquad ossia \qquad \begin{cases} l = x_1 \\ m = -x_2 \\ n = x_4\,. \end{cases} \qquad (11)$$

Nel passare dal sistema (10) al sistema (11) si è tenuto conto che i coefficienti l, m, n sono determinati a meno di un coefficiente di proporzionalità non nullo e quindi possiamo dare il valore 1 al fattore ρ.

Consideriamo ora un punto proprio P del piano $z = 0$; le sue coordinate omogenee nel sistema di coordinate indotto saranno $P(u, v, 1)$. Le precedenti relazioni (11) ci dicono che il punto P'_∞ ad esso corrispondente nella proiettività ha le coordinate $P'_\infty(u, -v, 1)$.

La retta r: PP'_∞ ha i parametri direttori $u, -v, 1$ e quindi le sue equazioni parametriche sono date dal sistema

$x = ut + u \quad , \quad y = -vt + v \quad , \quad z = t + 1$. (12)

Il generico piano α perpendicolare alla retta r ha l'equazione

- α: $ux - vy + z + k = 0$.

Il piano α_o ad esso parallelo e passante per l'origine O ha l'equazione

- α_o: $ux - vy + z = 0$. (13)

Sia M il punto di intersezione fra la retta r e il piano α_o (fig. 1).

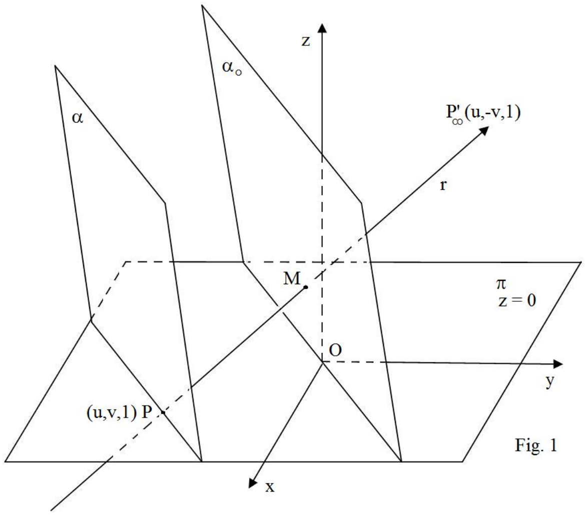


Fig. 1

Le sue coordinate sono date dal sistema:

$$\begin{cases} x = ut + u\,, \qquad y = -vt + v\,, \qquad z = t \\ ux - vy + z = 0. \end{cases} \qquad (14)$$

Eliminando i parametri u, v, t fra le quattro equazioni del sistema (14) si ottiene la superficie descritta dal punto M, al variare del punto P sul piano $z = 0$.

Infatti, sostituendo $t = z$ nelle prime due equazioni si ha:

- $\begin{cases} x = uz + u \\ y = -vz + v\,, \end{cases}$ *da cui* $\begin{cases} x = u(1+z) \\ y = v(1-z). \end{cases}$

Si ricava

$$u = \frac{x}{1+z}, \qquad v = \frac{y}{1-z} \quad . \qquad (15)$$

Sostituendo le (15) nell'equazione $ux - vy + z = 0$ del piano α_o si ha:

- $\dfrac{x^2}{1+z} - \dfrac{y^2}{1-z} + z = 0\,,$

da cui

$$x^2(1-z) - y^2(1+z) + z(1-z^2) = 0. \qquad (16)$$

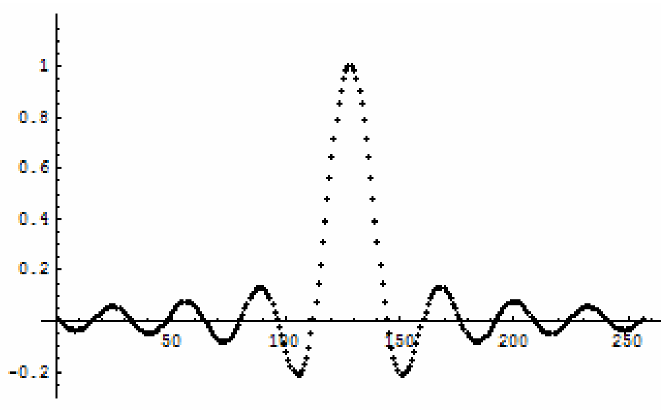
Come si vede, il luogo descritto dal punto M è una superficie F^3 del terzo ordine. L'origine $O(0,0,0)$ è un punto semplice avente come piano tangente il piano $z = 0$.

A conclusione del problema, vogliamo fare una opportuna precisazione: il punto $U(1,1,0)$, di cui parla il testo del quesito, non è il punto improprio della retta $x - y + k = 0$ giacente sul piano xy, ma è un determinato punto proprio dello spazio che giace sul piano $z = 0$. Nel riferimento (x_1, x_2, x_4) esso ha le coordinate $U(1,1,1)$.

[**] **Ringraziamento**: Ringrazio il prof. Tomaso Millevoi del Dipartimento di Matematica dell'Università degli Studi di Padova per avermi dato la traccia per la soluzione di questo interessante problema.

Bibliografia: Questo problema di geometria proiettiva è tratto dal libro di G. Vaccaro (manca l'anno di pubblicazione), *Elementi della teoria delle Curve e Superficie,* pagg. 100-101, Edizioni Veschi, Università degli Studi di Roma, e la sua soluzione è lasciata allo studioso.

[*] Socio Mathesis di Latina



Programma con MATHEMATICA

```
ClearAll["Global`*"]
ListPlot[Table[Sin[x]/x,{x,-8 π, 8 π, π/16}],
        PlotStyle→PointSize[0.015],
        PlotRange→{-0.3,1.2}
       ]
```

Grandi Matematici

Chi volesse descrivere la vita e le opere dei grandi matematici, non andrebbe in genere a pensare di caratterizzarne la personalità, la storia e le opere mediante dei quiz in rima. Il libro "Grandi matematici" di Maracchia (Silvio Maracchia, *Grandi matematici*, Pitagora editrice, Bologna, 2008), con prefazione di Bruno D'Amore, fa, invece, proprio questo percorso. Con la sintesi del matematico e dello storico, Maracchia fa corrispondere 50 biografie di grandi matematici a 50 indovinelli in versi che li possono caratterizzare alla luce di ciò che storicamente conosciamo di loro.

I matematici appartengono alla schiera dei "creatori", muniti, però, di un grande controllo logico-razionale. È, infatti, il controllo logico sulla fantasia che contraddistingue il genio. Vale in ogni campo questo abbinamento: se, per esempio, Picasso non avesse avuto questo controllo, sarebbe caduto in cose poco significative. Invece, egli seppe far tesoro sia del suo grande sapere formale nel campo dell'arte figurativa, sia della sua grande creatività.

Nel libro, prima viene proposto l'indovinello, poi guidati dalla corrispondente numerazione seguono il nome, la vita e le opere, in sintesi, dello scienziato.

Così l'indovinello, che riguarda Leibniz e la contesa per la primogenitura dell'origine del calcolo infinitesimale, dice:

> *Il sogno suo fu quello di noi tutti:*
> *capire dove stava la ragione*
> *col **semplice contare** e senza lutti*
> *di laiche guerre o di religione.*
> *Eppure fu coinvolto in un conflitto*
> *pel **calcolo** e da chi fu prima scritto.*

D'Amore afferma convincentemente che "La sfida ludica è assai più avvincente di un esercizio da risolvere e più problematica". Poi, se siamo in presenza di un essere umano, invece di un mostro sacro inavvicinabile, forse ci facciamo coinvolgere di più da ciò che ha fatto e sappiamo meglio comunicare ai giovani i risultati del suo lavoro. (*L.C.*)