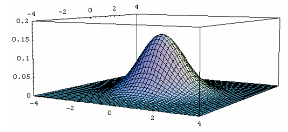
MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore: Luciano Corso - Redazione: Luciano Corso, Elisabetta Capotosto, Carlo Marchiori – Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – 338 6416432
e-mail: lcorso@iol.it – Stampa in proprio – Numero 137 – marzo 2009 – Uscito il 21 – 04 - 2009



Saggio sulla distribuzione Normale

Parte V

di Luciano Corso

[*Segue dal numero* 135]

Per dare una giustificazione alla intuizione di Laplace presentiamo qui di seguito il percorso consigliato da Émile Borel (1871, 1956) [B.18].

Secondo la dimostrazione di Laplace, l'errore complessivo ε che si commette nella misura di una grandezza, è dato dalla somma di un numero molto elevato n di errori elementari dovuti a cause perturbatrici indipendenti di natura accidentale. Con riguardo a ciascuno degli n errori elementari, si opera la seguente ipotesi semplificatrice: n_1 errori elementari assumono solo i valori 0 e ε_1 con probabilità, rispettivamente, $1 - p_1$ e p_1; n_2 errori elementari assumono solo i valori 0 e ε_2 con probabilità, rispettivamente, $1 - p_2$ e p_2; …; n_k errori elementari assumono solo i valori 0 e ε_k con probabilità, rispettivamente, $1 - p_k$ e p_k. Per ottenere l'errore complessivo ε si devono ora prelevare dalle k variabili casuali di Bernoulli

$$X_i = \begin{cases} 0 & 1 \\ 1 - p_i & p_i \end{cases} \qquad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

n_i determinazioni indipendenti, la cui somma permette di ottenere i k numeri aleatori $N_1, N_2, \ldots, N_k$ che rappresentano il numero delle volte in cui ricorre l'errore ε_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$. L'errore complessivo è quindi:

$\varepsilon = N_1\varepsilon_1 + N_2\varepsilon_2 + \ldots + N_k\varepsilon_k$.

Poiché ciascuna delle variabili casuali Ni $(i = 1, 2, \ldots, k)$ è una variabile casuale $Bin(n_i, p_i)$, in quanto somma di x_i variabili casuali di Bernoulli indipendenti di parametro p_i, siamo in presenza di una combinazione lineare di variabili binomiali indipendenti. Per il teorema di De Moivre-Laplace ciascuna delle $Bin(n_i, p_i)$ converge in distribuzione a una $\mathrm{N}(n_i{\cdot}p_i,\ n_i{\cdot}p_i{\cdot}q_i)$ e quindi ε è distribuito come una Normale.

Dal punto di vista più generale, cioè se intorno alle distribuzioni dei gruppi di osservazioni da cui estrarre gli errori non si fa alcuna ipotesi, allora le difficoltà di una dimostrazione rigorosa si complicano. Tale dimostrazione venne, però, data da Tchebychev-Markov [B.9 vol. II].

Come è noto, spesso Laplace faceva propri risultati scientifici altrui senza citazione della fonte [B.7]; il che suggerisce che anche nel caso della Normale egli si sia comportato così (soprattutto con riferimento a De Movre).

Nei lavori precedenti il 1809 di De Moivre e di Laplace la Normale aveva al posto di x (in chiave moderna μ) il prodotto np e al posto di σ l'espressione $\sqrt{(npq)}$, tipici della binomiale. Comunque sia, Laplace sviluppò il risultato di De Moivre, sistemandolo rigorosamente, in un lavoro del 1812 dal titolo «*Théorie analytique des probabilités*».

A chi va la primogenitura?

Il riconoscimento di averne fatto una sistemazione chiara sotto l'aspetto formale e di aver percorso una via originale per ottenerla è quindi da dare a Gauss, anche se permane, nella ricostruzione storica dell'origine, una sfumatura sequenziale di interventi che non consente di definire con precisione a chi sia attribuibile il merito finale. Lo stesso Gauss non arriva alla densità di "Gauss"; si ferma un po' prima. Peraltro i maggiori autori consultabili sull'argomento (si veda la bibliografia allegata in fondo a questo articolo, accreditano questa idea e chiamano spesso la v.a. Normale «*Gaussiana*» e nessuno di loro fa cenno a De Moivre o a Laplace, teorema del limite locale a parte). Una curiosità abbastanza interessante è che sui vecchi 10 marchi tedeschi, ora fuori corso per l'euro, appare l'effige di Gauss e – cosa più unica che rara al mondo e impossibile in Italia – l'equazione che descrive la densità di probabilità normale con il suo grafico in coordinate cartesiane! I tedeschi di solito si documentano e sbagliano poco in questo genere di cose.

Lo sviluppo semantico successivo

Gli studi di De Moivre, Laplace, Adrian, Gauss e Bessel sulla distribuzione Normale, non esaurirono la sua portata semantica.

Ancora, non si era compresa completamente la potenza esplicativa della Normale. Per trovare una interpretazione della normale più generale occorre arrivare prima a Lambert Adolphe Jacques Quételet (1796 – 1874, astronomo e statistico belga, che volle e organizzò il primo congresso mondiale di Statistica nel 1853), e poi a Francis Galton (1822 – 1911, inglese e cugino di C. Darwin, patrocinatore, tra l'altro, della eugenetica, termine da lui coniato). Nel 1835 Quételet pubblicò un importante scritto dove appariva un'indagine statistica da lui fatta in cui due raccolte di dati riguardanti la misura del torace di soldati scozzesi e la statura dei militari di leva francesi, entrambi raggruppati in classi di frequenza, mostravano distribuirsi come una *gaussiana*, ma non andò oltre.

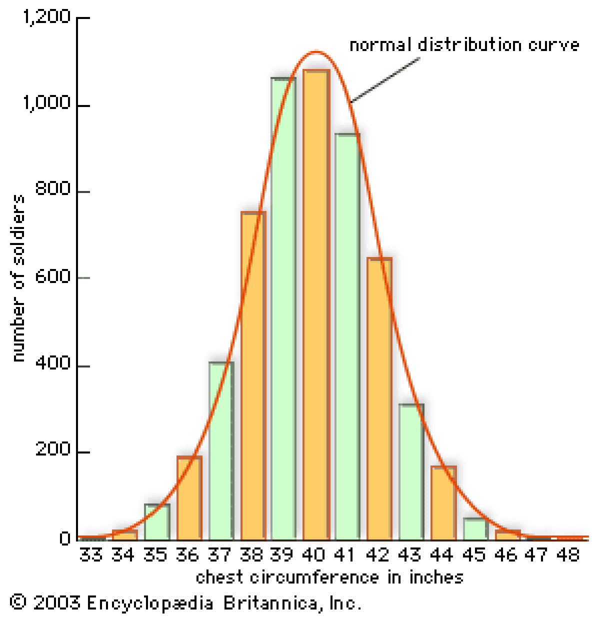


Fig. 1. Histogram chart Histogram (bar chart) showing chest measurements of 5,732 Scottish soldiers, published in 1817 by Belgian mathematician Adolph Quetelet. This was the first time that a human characteristic had been shown to follow a normal distribution, as indicated by the superimposed curve. [B.12]

Si noti che l'elaborazione di Quételet si basò su un accostamento del modello teorico della Normale ai dati sperimentali costruito solo sulla media e la varianza sperimentali, che costituirono i parametri del modello teorico. Non fece, invece, alcun paragone con altri modelli di distribuzione di probabilità, né alcuna considerazione inferenziale, essendo quest'ultima non nota in quel tempo.

L'intuizione più generale al riguardo, però, la ebbe Francis Galton che comprese la forza esplicativa della gaussiana, da lui detta anche **ogiva**, come modello di studio della distribuzione dei caratteri statistici di numerosi fenomeni naturali e in particolare della diversità intraspecifica nelle misure di caratteristiche quantitative biologiche. Forse è proprio con Galton che si introduce, per descrivere il comportamento probabilistico di numerose variabili di fenomeni naturali, il termine *Normale*. Normale, infatti, era la distribuzione dei dati sperimentali provenianti da esse e quindi diventava *norma* questo comportamento per qualsiasi distribuzione di dati presente in variabili della natura. Tra l'altro, Galton, nel 1889, descrive la forza esplicativa della casualità descritta dalla distribuzione Normale nel seguente modo: «*I know of scarcely anything so apt to impress the imagination as the wonderful form of cosmic order expressed by the "Law of Frequency of Error". The law would have been personified by the Greeks and deified, if they had known of it. It reigns with serenity and in complete self-effacement, amidst the wildest confusion. The huger the mob, and the greater the apparent anarchy, the more perfect is its sway. It is the supreme law of Unreason. Whenever a large sample of chaotic elements are taken in hand and marshaled in the order of their magnitude, an unsuspected and most beautiful form of regularity proves to have been latent all along*». Ciò completa la sua intuizione sull'importanza della Normale [Si veda anche B.20].

Galton, come Quételet ma in modo più organico, usò nei processi di adattamento ai dati sperimentali curve di densità di probabilità diverse. Considerò due soli parametri: la media e la varianza ma procedette a numerose comparazioni. Così, involontariamente peraltro, fu un precursore della statistica parametrica.

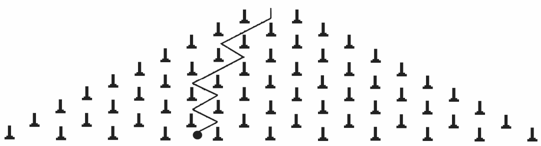


Fig. 2. Esperimento di Galton sulla casualità degli urti [B.20]; la distribuzione delle cadute della particella è di tipo Normale se consideriamo un numero infinito di prove e una macchina costituita da un numero infinito di linee di ostacoli.

Sia Quételet sia Galton, in sostanza, compresero che molti fenomeni naturali avevano misure che si distribuivano secondo una normale, senza con ciò poter dire che questi fenomeni fossero affetti da errori di misurazione (peraltro sempre esistenti). Questo dimostra che essi, rispetto a Gauss e Laplace, aggiunsero semantica, e non di poco conto, alla sintassi del modello.

Occorse arrivare più in là, nei primi decenni del Novecento, per comprendere che la distribuzione Normale conteneva cose di estrema importanza per lo sviluppo della cosiddetta induzione probabilistica. Con il teorema del limite centrale in forma generale (Lindeberg-Lévy, Aleksandr Ljapunov, Andrej Andreevič Markov) e con lo sviluppo della teoria dei grandi campioni in statistica inferente ci si rese conto che la distribuzione normale era il fondamento dell'inferenza statistica.

Paul Lévy (1886 – 1971) provò il Teorema Centrale Limite usando la funzione caratteristica dei momenti (1925), indipendentemente dal matematico e statistico finlandese Jarl Waldemar Lindeberg (1876 – 1932) il quale provò (1922) lo stesso teorema usando le tecniche della convoluzione. Lévy scoprì, inoltre, la classe della distribuzioni di probabilità conosciute come "distribuzioni stabili" e provò la versione generale del teorema centrale limite per variabili aleatorie statisticamente indipendenti con varianza infinita [B.10].

Il teorema centrale limite nella versione più generale di Aleksandr Michajlovič Ljapunov (1857 – 1918) è una variante di quella di Lindeberg-Lévy. In Lindeberg-Lévy si richiede che le variabili aleatorie in questione siano sia statisticamente indipendenti, sia identicamente distribuite, con varianza finita non nulla; qui, invece, si richiede solo che esse siano statisticamente indipendenti. L'enunciato del teorema è:

Sia X_h , $h \in \boldsymbol{I\!N}$, una sequenza di variabili aleatorie statisticamente indipendenti. Nelle ipotesi in cui X_h abbia il valore atteso e la varianza finita rispettivamente pari a $M(X_h) = \mu_h$ e $Var(X_h) = \sigma_h^2$, il momento centrale di terzo ordine

$$\overline{\mu}_{3,h} = M\left(X_h - \mu_h\right)^3$$

sia finito e soddisfi la condizione (detta condizione di Lyapunov):

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\left(\sum_{h=1}^{n} \overline{\mu}_{3,h}\right)^{1/3}}{\left(\sum_{h=1}^{n} \sigma_h^2\right)^{1/2}} = 0 \, ,$$

ed sia $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$, la variabile aleatoria n-somma parziale delle X_h variabili aleatorie, allora il valore normalizzato di S_n ,

$$Z_n = \left(S_n - \sum_{h=1}^{n} \mu_h\right) \Big/ \left(\sum_{h=1}^{n} \sigma_h^2\right)^{1/2} ,$$

converge in distribuzione a una v.a. normale standard N(0, 1) al tendere di $n \to +\infty$. Per una dimostrazione del teorema, si veda [B.10].

Qui, però, ormai siamo ai giorni nostri (circa 100 anni fa al massimo non sono granché per lo sviluppo di un'idea scientifica) e la storia diventa cronaca di tutti i giorni, ma solo là dove si fa ricerca sul serio.

[**] In data 27 – 12 – 2008 sono venuto in possesso del lavoro integrale di Gauss che mi ha permesso di verificare lo scostamento tra la mia dimostrazione (si veda MatematicaMente 132) e quella sua propria. In bibliografia [B.19] riporto i riferimenti per una consultazione del lavoro di Gauss.

Ringraziamenti: Il presente lavoro è stato possibile grazie allo stimolo delll'amico Luciano Tajoli che mi ha dato gli spunti perché mi impegnassi nella ricerca bibliografica e nella rivisitazione formale dei concetti inerenti l'argomento trattato. Un ringraziamento va dato anche ai colleghi Gianfranco Pezzo che mi ha posto soluzioni integrative al mio indirizzo relativo all'analisi di Stirling-De Moivre, Alberto Guerrini il quale ha revisionato parti importanti delle dimostrazioni da me proposte.

Bibliografia: [B.1] Pascal Blaise, *Traité du triangle arithmétique*, pagg. 97 e segg., Oevres, Bibliothèque de la Pléiade, Gallimard, 1954, France. [B.2] Sibirani Filippo, *Lezioni di Matematica generale e finanziaria*, vol. II, CEDAM, Padova, 1958, pagg. 33 e segg.. [B.3] Sibirani Filippo, *Lezioni di Matematica generale e finanziaria*, vol. I, CEDAM, Padova, 1959, pagg. 484 e seguenti. [B.4] Vicentini A., *Approssimazione della binomiale alla normale*, MatematicaMente n. 17, Mathesis VR, 19??. [B.5] Daboni Luciano, *Calcolo delle probabilità ed elementi di statistica*, UTET, Torino, 1980, pagg. 162 e segg.. [B.6] Corso Luciano, *Le funzioni discrete del triangolo di Tartaglia-Pascal*, MatematicaMente n. 36 dicembre 2000, Mathesis Verona. [B.7] Kline Morris, *Storia del pensiero matematico*, G. Einaudi editore Vol. I, Torino, 1991. [B.8] Corso Luciano, *La distribuzione di Laplace*, MatematicaMente n. 27, marzo 2000, Mathesis VR. [B.9] Castelnuovo Guido, *Calcolo delle probabilità*, Editore Zanichelli, Bologna, 1967. [B.10] Landenna G., Marasini D., Ferrari P., *Probabilità e variabili casuali*, Il Mulino, Bologna, 1997. [B.11] Belzer J., Holzman A. G., Kent A., *Elcyclopedia of Computer Science and Tecnology* n. 11, pagg. 346 e segg., CRS Press. [B.12] Encyclopedia Britannica, http:// www. britannica.comEBchecked/topicart/487/148/70823/Histogram-chart-Histogram-showing. [B.13] Avondo-Bodino Giuseppe, *Elementi di calcolo delle probabilità*, pagg. 154 e segg., Zanichelli editore, Bologna, 1974. [B.14] Canuto Claudio, Tabacco Anita, *Analisi matematica* 1, Springer ed., Milano, 2008. [B.15] Parzen Emanuel, *La moderna teoria delle probabilità e le sue applicazioni*, Franco Angeli editore, Milano, 1976. [B.16] Pizzetti Paolo, *I fondamenti matematici per la critica dei risultati sperimentali*, Atti della Regia Università di Genova (estratto), Genova, 1892. [B.17] Bessel Friedrich Wilhelm, *Untersuchungen über die Wahrscheinlichkeit der Beobachtungsfehler*, Astronomische Nachrichten XV, 1838; Werke, vol. II, pag. 372. [B.18] Borel Émile, *Eléments de la theorie des Probabilités*, Hermann, Paris, 1924. [B.19] Gauss Carolo Friderico (1809), *Theoria Motus Corporum Coelestium in Sectionibus Conicis Solem Ambientium*, Liber II, Sectio III, par. 175 e segg., pagg. 240 e segg., GDZ Göttinger Digitalisierungszentrum 2008, gdz@sub.uni-goettingen.de, Göttingen State and University Library. [B.20] Arnaldo Vicentini, *Perché funziona l'esperimento di Galton?*, MatematicaMente n. 13, gennaio 1999, Mathesis VR.