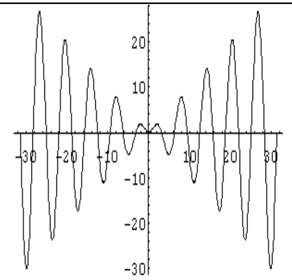
MATHESIS

Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche
Fondata nel 1895

Sezione di Verona

Redazione: Luciano Corso, Luigi Marigo, Elisabetta Capotosto – Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045)8344785 – e-mail: lcorso@itisgmarconi.vr.it

- Numero 14 - febbraio 1999



Sulla probabilità di un evento, nel continuo

di Luciano Corso

Si voglia definire una misura generale di probabilità di un evento *A* che sia coerente con la misura nel discreto e che ci permetta di affrontare e risolvere la maggior parte dei problemi probabilistici che si possono avere nel continuo. Gli assiomi di probabilità che abbiamo appreso nel discreto devono valere anche in questo caso. Prendiamo in considerazione un intervallo unitario aperto a sinistra di **R**: $\Omega=(0,1]$. Con riferimento a un ben preciso esperimento, sia ω un generico elemento di Ω (suo punto o parte elementare). Definiamo la misura di un intervallo *I= (a,b]* nel seguente modo:

$|I|=|(a,b]|=(b-a)$. (1)

Consideriamo ora una partizione finita di Ω (ricordiamo che una partizione di un insieme Ω è una suddivisione di Ω in sotto insiemi non vuoti, a due a due disgiunti e con unione uguale a Ω). Una partizione costituisce un ricoprimento perfetto di Ω (nel senso di Lebesgue [B.1]). Sia ora

$$A=\bigcup_{i=1}^{n} I_i=\bigcup_{i=1}^{n}(a_i,b_i] \quad (2)$$

con I_i $\forall i$ sotto insiemi disgiunti e contenuti in Ω. *A* è un evento possibile di Ω, con riferimento ad una sua partizione. Chiamiamo *A* plurintervallo di Ω [B.2]. Assegniamo ad *A* la misura

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}|I_i|=\sum_{i=1}^{n}|(a_i,b_i]|=\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i) \quad (3)$$

e dichiariamo che essa è la probabilità dell'evento *A*. In questo modo la probabilità dell'evento *A* è definita solo se *A* è una unione di intervalli disgiunti, sotto insiemi dell'intervallo (0, 1]. Se *A* e *B* sono due eventi, cioè due unioni disgiunte finite contenute in Ω, allora $P(A\cup B)= P(A)+P(B)$. Questa relazione – abbastanza intuitiva – è una conseguenza dell'additività dell'integrale di Riemann (e della misura di Peano-Jordan). Dalla definizione di probabilità che abbiamo dato risulta anche che un punto di Ω ha probabilità zero di verificarsi; infatti: $|I|=|(a,a]|=(a-a)=0$, $\forall a\in\Omega$. Inoltre qualunque sia la partizione di Ω, $P(\Omega)=1$. Si noti che lo schema interpreta la probabilità di un evento *A* come misura normalizzata di unioni di intervalli finiti di una partizione possibile di Ω. Ω è lo spazio campionario (o spazio elementare degli eventi necessari e incompatibili). Se si lancia una particella elementare puntiforme sul segmento *(0,1]*, si può, per quanto detto, determinare la probabilità che essa cada in *A*. Si osserva che un elemento $\omega\in\Omega$ è pure un caso particolare di unione di generici sotto intervalli di Ω. La definizione (3) ci permette di giustificare la misura di probabilità assegnata ai risultati di una sequenza finita di lanci di moneta e di qualunque altro esperimento dicotomico (cioè un esperimento che prevede il verificarsi di due eventi *A* e *B* complementari tra loro: $A\cap B=\varnothing$, $A\cup B=\Omega$ in ogni prova), in quanto ogni sequenza finita di *n* lanci genera una partizione finita di Ω in 2^n parti. Dal punto di vista formale si ha:

$$[\omega : d_i(\omega)=u_i\,;\, i=1,\dots,n]=\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{u_i}{2^i}\,;\,\sum_{i=1}^{n}\frac{u_i}{2^i}+\frac{1}{2^n}\right] \quad (4)$$

ove *n* sono i lanci della moneta, u_i sono le cifre o *0* o *1* all'*i*-esimo lancio. La probabilità di ω è data da:

$$P(\omega : d_i(\omega)=u_i\,;\, i=1,\dots,n)=2^{-n} \quad (5)$$

Per esempio se il numero di prove fosse n=3, Ω risulterebbe diviso in 2^3 parti cui è possibile dare una rappresentazione grafica (fig.1) sull'intervallo (0,1]. La partizione viene generata, in questo caso, da terne di cifre binarie:

000 001 010 011 100 101 110 111

fig. 1

$P(\omega:\dots)$ descrive la probabilità che un punto cada in (si verifichi, cioè) una di queste parti; per esempio, la parte *(101)* ha probabilità di verificarsi uguale a: $2^{-3}=0{,}125$ su base decimale oppure *(0,100 –0,101) = 0,001* su base binaria.

Quando $n\to\infty$, la sequenza infinita di cifre binarie $(d_1(\omega), d_2(\omega),\dots)$ identifica una parte ω, della partizione di infinite parti di Ω, di misura infinitesima. Siamo in presenza di una famiglia infinita di eventi. La probabilità quindi che un punto scelto a caso sull'intervallo (0,1] cada nell'intervallino infinitesimo ω è – per la (6) – infinitesima. Questa affermazione però – anche se di buon senso - non è giustificata dagli assiomi di Kolmogorov sulla probabilità di un evento. Dovrà quindi essere sostenuta da un nuovo assioma. Eccolo:

$$\forall\{A_k\}_1^n : A_k\supseteq A_{k+1}\forall k,$$
$$\left[\left[\lim_{n\to\infty} A_n\left(=\bigcap_{k=1}^{\infty}A_k\right)=\varnothing\right]\Rightarrow\left[\lim_{n\to\infty}P(A_n)=0\right]\right] \quad (6)$$

ove $\{A_k\}$ è una successione non crescente di eventi che si contengono l'un l'altro e A_n è l'ultimo della serie. L'assioma (6) viene rappresentato sinteticamente così: $A_n\downarrow\varnothing \Rightarrow P(A_n)\to 0$.
In realtà i risultati di una sequenza di infiniti lanci di moneta identificano punti di Ω, non intervalli infinitesimi. Il numero

$$\omega=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{d_k(\omega)}{2^k}=0,d_1(\omega)d_2(\omega)\dots d_n(\omega)\dots \quad (7)$$

costituito da una sequenza infinita di 0, 1, nell'intervallo (0,1], identifica infatti un numero reale: se la sequenza dimostra un periodo, essa è un numero razionale, altrimenti è un numero irrazionale.

(segue al numero 15)

Bibliografia: [B.1] Patrick Billingsley, *Probability and Measure*, J. Wiley & Sons, New York, 1995 – [B.2] Luciano Daboni, *Calcolo delle probabilità ed elementi di statistica*, UTET, Torino, 1980 – Giorgio Dall'Aglio*, Calcolo delle probabilità, Zanichelli, Bologna, 1991*

La quantizzazione dei reali *modulo* π

di Arnaldo Vicentini

Leggi il programma in Pascal che segue. Fissate le variabili x, m ed n, esso si limita a richiamare la Function kPI(x, m,n), a scrivere x e il valore di kPI che confronta con π. Orbene: se m e n sono abbastanza grandi, kPI restituisce, con la massima precisione possibile, il multiplo di π prossimo ad x. Per x=7.725 viene 2π; ma per x= 7.226 viene 3π. KPI(x,m,n) ricerca per dicotomica (iterata al più n volte) uno zero di f(x,

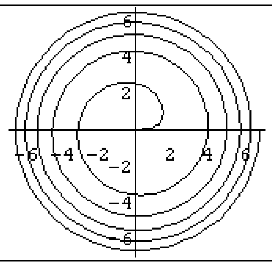
m) – dopo averne localizzato un intorno – richiamando f (cui passa m costante) – nella certezza che: a) f(x,m)=f(-x,m); b) f(x,m) decresce al crescere di x; c) c'è sempre uno zero di f(x,m) a distanza finita dal valore arbitrario di x ricevuto. Dunque f(x,∞) deve essere una funzione pari che alterna infiniti zeri ad infiniti poli e, per x>0, decresce tra 0 e il primo polo e tra un polo e il successivo. Ma cosa fa esattamente f(x, m)?

```
Program kP_GRECO;
  type itg=integer; exd=extended;
  var m,n,D:itg; x,y:exd;
Function f(x:exd;m:itg):exd
  var y,z:exd;
begin
  m:=2*abs(m-3)+7; z:=-x*x; y:=z/m;
  repeat m:=m-2; y:=z/(y+m) until m=5;
  f:=y+3
end;
Function kPI(x:exd;m,n:itg):exd;
  var y,a,b:exd;neg:boolean;
begin
  if x=0 then begin kPI:=0; exit end;
  neg:=(x<0); if neg then x:=-x; y:=f(x,m);
  while y>0 do begin x:=x+1;y:=f(x,m) end;
  b:=x;
  while y<0 do begin x:=x-1;y:=f(x,m) end;
  a:=x;
  repeat
  x:=(a+b)/2; y:=f(x,m); n:=n-1;
  if y=0 then begin kPI:=x; exit end;
  if y>0 then a:=x else b:=x
  until (a=b) or (n=0);
  if neg then kPI:=-x else kPI:=x
end;
BEGIN {MAIN}
  X:=7.725; D:=18-trunc(ln(x*x)/ln(100));
  m:=30; n:=63; write('Aspetta!');
  y:=kPI(x,m,n);
  writeln(chr(12),'x=' ,x:21:D,';');
  write('y =',y:21:D,' =',y/PI:21:18);
  writeln('*π.'); writeln;
  write('Per uscire premi un tasto');
  while not keypressed do
END.
```

La spirale di Fermat

La spirale ha la seguente equazione in coordinate polari $r^n=a\cdot\theta$, con $a=10$, $n=3$ e $\theta \geq 0$ in $\mathbf{R}$.

Bibliografia: Luciano Cresci, Le curve celebri, ed. Muzzio, Padova, 1998



Il numero *i* e le due trigonometrie

di Luigi Marigo

Siano $x=\cos\theta$ e $y=\text{sen}\,\theta$, con $x^2+y^2=1$. Il punto $P(\cos\theta, \text{sen}\,\theta)$ descrive, al variare di θ, la circonferenza di centro O e raggio $r=1$; L'insieme di relazioni coinvolgenti $\cos x$ e $\text{sen}\,x$ prende il nome di «trigonometria circolare», caratterizzata dalle *periodicità*. Siano poi $x=\cosh\theta = (e^{\theta}+e^{-\theta})/2$ e $y=\text{senh}\,\theta= (e^{\theta}-e^{-\theta})/2$, con $x^2-y^2=1$. Il punto $P(\cosh\theta, \text{senh}\,\theta)$ descrive, al variare di θ, l'iperbole equilatera di centro O e asintoti di equazioni $y=\pm x$, e l'insieme di relazioni coinvolgenti $\cosh\theta$ e $\text{senh}\,\theta$ prende il nome di *trigonometria iperbolica*, caratterizzata da non periodicità.

Il numero *i* crea un legame tra le due trigonometrie: si osservi, per iniziare, che sostituendo y con $i\cdot y$ l'equazione $x^2+y^2=1$ si trasforma nell'equazione $x^2-y^2=1$, e viceversa; ciò equivale a sostituire $\cos\theta$ con $\cosh\theta$ e $\text{sen}\,\theta$ con $i\cdot\text{senh}\,\theta$, ma non si esaurisce così la ricchezza e la sottigliezza del interrelazioni tra *i*, trigonometria circolare e trigonometria iperbolica.Come esempio costruiamo una relazione la cui struttura è invariante rispetto allo scambio tra le due trigonometrie. Prendiamo le mosse dalle formule di Eulero:

$$\cos\theta = \frac{e^{i\cdot\theta}+e^{-i\cdot\theta}}{2} = \cosh i\theta$$

$$i\cdot\text{sen}\,\theta = \frac{e^{i\cdot\theta}-e^{-i\cdot\theta}}{2} = \text{senh}\, i\theta$$

da cui $a\cdot\cos\theta+i\cdot b\cdot\text{sen}\,\theta=a\cdot\cosh i\cdot\theta+b\cdot\text{senh}\,i\cdot\theta$, con $a,b\in\mathbf{R}$ (1)

Parimenti:

$$\cosh\theta = \frac{e^{\theta}+e^{-\theta}}{2} = \frac{e^{-i(i\cdot\theta)}+e^{i\cdot(i\cdot\theta)}}{2} = \cos i\theta$$

$$i\cdot\text{senh}\,\theta = \frac{e^{\theta}-e^{-\theta}}{2}\cdot i = \frac{e^{i\cdot(i\cdot\theta)}-e^{-i\cdot(i\cdot\theta)}}{2\cdot i} = \text{sen}\, i\theta$$

da cui: $a\cdot\cosh\theta + i\cdot b\cdot\text{senh}\,\theta = a\cdot\cos i\cdot\theta + b\cdot\text{sen}\,i\cdot\theta$ (2)

Le uguaglianza (1) e (2) possono essere enunciate verbalmente così: «Una combinazione lineare a coefficienti reali di funzioni iperboliche (circolari) di $i\cdot\theta$ è uguale a una combinazione a coefficienti reale e immaginario di funzioni circolari (iperboliche) di θ».

Ritengo importanti tali relazioni perché si trasformano l'una nell'altra semplicemente scambiando *cosh( )* con *cos( )* e *senh( )* con *sen( )*: i fa da ponte tra le due trigonometrie, tra periodicità e non periodicità.

N.B.: Lungo i rami aperti di iperbole non si gira e non si rischia il mal di testa (vedi foglio n. 6) ma si rischia piuttosto di sparire all'infinito.

Dopo il 15 viene il 16, non il 17 !

Doveva capitare. Si è verificato un errore nella stampa del nuovo Statuto nazionale della MATHESIS. È saltato un intero articolo (l'articolo 16) sia nella composizione dello Statuto apparso sul P. d. M. Serie VII - Volume 5 - Numero 2-3 – aprile-settembre 1998, sia sul pieghevole inviato a tutte le sezioni da quella di Verona. Male. Ci consola l'idea che, in tutta Italia, solo un socio si è accorto dell'errore. Invio un nuovo pieghevole che spero sia finalmente corretto.

Cogliamo l'occasione per ricordare ai presidenti di sezione che, per motivi organizzativi, l'invio a Roma dell'elenco degli iscritti alla Mathesis per il 1999 deve essere fatto possibilmente entro il 15 marzo.

Il segretario nazionale L. C.

Saper porre ai numeri domande corrette

I numeri parlano, ma bisogna far loro domande corrette! A riprova di ciò si segua quanto Robert Niles in «Statistics every writer should know» scrive: "Supponiamo che qualcuno ci dica che a Springfield il numero di omicidi all'anno è passato dai 29 di cinque anni fa ai 50 di quest'anno (un aumento del 72,41%), mentre a Capital City è aumentato da 42 a 50 (solo il 19,05% in più). Siamo tutti pronti a concludere che la città di Capital city ha saputo fronteggiare in modo più efficace il problema della criminalità. Se però aggiungiamo che negli stessi 5 anni la popolazione di Springfield è passata da 450.000 abitanti a 800.000 abitanti mentre quella di Capital City da 550.000 a 600.000, ci accorgiamo facilmente che il numero di omicidi per abitante a Springfield è in realtà diminuito, mentre è drammaticamente aumentato a Capital City!" Infatti, il tasso percentuale di crescita degli omicidi, tenendo conto della variazione della popolazione, è per Springfield r_s=[(50/800000)-(29/450000)]/(29/450000) ≅ -0,03017, mentre per Capital City è r_c=[(50/600000)-(42/550000)]/(42/550000) ≅ 0,09127.

Se l'esempio vi ha fatto pensare che forse è bene saperne di più sulla scienza più utilizzata e – purtroppo - meno conosciuta del nostro tempo, una buona risorsa è Hyperstat, della Rice University. Se invece nessuno riuscirà mai a convincervi dell'affidabilità della statistica, consolatevi, non siete i soli. Scriveva Mark Twain:«Ci sono le bugie, le grandi panzane, e le statistiche».

Bibliografia: Su "Tutto internet" a cura di McGraw-Hill. Estratto (e sistemato) da «Statistiche, la verità ha sempre più facce» di Matteo Merzagora. Siti Web: Concreto e astratto, Statistica di base • www.nilesonline.com/stats /index.shtml; Didattica e gioco, Probabilità animate • www.ruf.ri ce.edu/~lane/hyperstat/