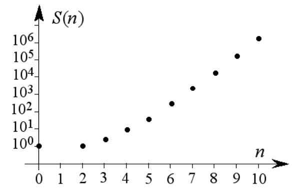
MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore: Luciano Corso – Redazione: Luciano Corso, Elisabetta Capotosto, Carlo Marchiori, Giovanna Tessari – Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – 338 6416432 – e-mail: lcorso@iol.it – Stampa in proprio – Numero 140 – Pubblicato il 06 – 07 – 2009



Fattoriali e "subfattoriali"

di Arnaldo Vicentini

Non sapevo che oltre ai "fattoriali" ci fossero anche i numeri "subfattoriali". Non lo sapevo fino al mese scorso quando mi sono imbattuto nel seguente quiz:

«*Hai 12 gettoni numerati da 1 a 12 e li disponi casualmente (cioè senza leggerne il numero) in una lista di 12 caselle pure numerate da 1 a 12. Qual è la probabilità che m gettoni finiscano, ciascuno, sulla casella con lo stesso numero?*»

A questo punto … vi invito a sospendere la lettura per dedicarvi a risolvere il quiz. Leggete il seguito solo se preferite essere spettatori piuttosto che attori!

Il quiz è una complicazione del quiz di Nicolaus Bernoulli (che mi pare fosse un nipote di Daniel, quello del *principio di idrodinamica*, a sua volta figlio di Johan e nipote di Jacob); quiz che è pressappoco il seguente:

«*In vista delle feste natalizie, il Sig. Rossi scrive n biglietti augurali personalizzati ad altrettanti amici, gli indirizzi dei quali ha già scritto su altrettante buste. In quanti modi il Sig. Rossi può sbagliare tutti gli accoppiamenti biglietto-busta?*».

Questo quiz equivarrebbe alla generalizzazione del precedente quiz dei gettoni se la domanda fosse: «In quanti modi il Sig. Rossi può abbinare correttamente k biglietti su n alle rispettive buste (sbagliandone quindi $n-k$)?»

Dato un insieme di m elementi (distinti), i modi con cui essi si possono enumerare sono $m!$ Ciò equivale a dire che m oggetti si possono *disporre* in $m!$ modi distinti (detti *permutazioni*). Data una iniziale disposizione degli m oggetti, indichiamo allora con $S(m)$ il numero di quelle permutazioni - di tutte le $m!$ - in ciascuna delle quali nessun oggetto sta nel posto che occupava nella disposizione iniziale. È evidentemente $S(n)$ il numero che risolve il quiz di N. Bernoulli (dei modi di sbagliare tutti gli n abbinamenti biglietto-busta). Se, invece, k su n biglietti (non importa quali) sono giustamente abbinati alle rispettive buste (ed i restanti $n-k$ sono abbinati in modo sbagliato), indichiamo allora con $G(n,k)$ il numero di modi in cui ciò può accadere. Abbinando casualmente biglietti e buste (o gettoni e caselle nel quiz precedente), la probabilità di azzeccare esattamente k abbinamenti giusti su n (ed $n-k$ sbagliati) è dunque $G(n,k)/n!$.

Detto $C(n,k)$ il numero di combinazioni di n elementi a k a k, basta un momento di riflessione per convincerci che:

$$G(n,k) = C(n,k)\cdot S(n-k)\ . \tag{1}$$

Il quiz della probabilità di fare k abbinamenti giusti su n sarebbe risolto se conoscessimo $S(m)$ per ogni m naturale. Ma questi numeri si possono calcolare sfruttando il fatto che la somma di tutti i $G(n,k)$ per k da 0 ad n inclusi deve valere $n!$ per ogni n naturale:

$$\forall n\in \mathbf{N}\ \sum_{k=0}^{n} G(n,k) = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)\cdot S(n-k) = n! \tag{2}$$

Ricordando che $C(n,k) = C(n,n-k)$ è il numero che nel *Triangolo di Tartaglia* sta nella riga di indice n e nella colonna di indice k (e che vale "*n-sopra-k*"), dalla (2), ponendo $h = n-k$ (ed essendo la somma commutativa) si ha:

$$\forall n\in \mathbf{N}\ \sum_{h=0}^{n} C(n,h)\cdot S(h) = n! \tag{3}$$

Dalla (3), per n = 0, 1, 2, …, si ottiene un sistema lineare triangolare, (lungo a piacere e sempre determinato), la cui soluzione è facilitata dalla ben nota proprietà dei $C(n,k)$:

$$\forall n>0\ \forall k\in\{0,\ldots,n\}\ C(n+1,k+1) = C(n,k)+C(n,k+1)\ . \tag{4}$$

Come si può verificare immediatamente iterando il passare da un sistema ad un altro ad esso equivalente col sottrarre membro a membro una equazione alla successiva a partire da quando questa non è ancora esplicita, (cosa che faremo più sotto a titolo di esempio per un piccolo numero di equazioni), la soluzione generale del sistema è data da:

$$\forall m\in \mathbf{N}\ S(m) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k C(m,k)\cdot(m-k)! \tag{5}$$

Da qui, sostituendo $C(m,k)$ con il suo valore, abbiamo:

$$\begin{aligned} S(m) &= \sum_{k=0}^{m}(-1)^k \frac{m!}{k!(m-k)!}\cdot(m-k)! = (m!)\cdot\sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^k}{k!} = \\ &= (m!)\cdot\left[\frac{1}{0!}-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{(-1)^{(m-1)}}{(m-1)!}+\frac{(-1)^m}{m!}\right]. \end{aligned} \tag{6}$$

Il sistema delle prime 5 equazioni lineari nelle incognite $S(m)$ (che per brevità diciamo provvisoriamente x_m) porge:

$$\begin{cases} x_0 = 0! = 1 \\ x_0 + x_1 = 1! \\ x_0 + 2x_1 + x_2 = 2! \\ x_0 + 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 3! \\ x_0 + 4x_1 + 6x_2 + 4x_3 + x_4 = 4! \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0! = 1 \\ x_1 = 1! - 0! = 0 \\ x_1 + x_2 = 2! - 1! \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 3! - 2! \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 = 4! - 3! \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0! = 1 \\ x_1 = 1! - 0! = 0 \\ x_2 = 2! - 2\cdot 1! + 0! = 1 \\ x_2 + x_3 = 3! - 2\cdot 2! + 1! \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = 4! - 2\cdot 3! + 2! \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0! = 1 \\ x_1 = 1! - 0! = 0 \\ x_2 = 2! - 2\cdot 1! + 0! = 1 \\ x_3 = 3! - 3\cdot 2! + 3\cdot 1! - 0! \\ x_3 + x_4 = 4! - 3\cdot 3! + 3\cdot 2! - 1! \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0! = 1 \\ x_1 = 1! - 0! = 0 \\ x_2 = 2! - 2\cdot 1! + 0! = 1 \\ x_3 = 3! - 3\cdot 2! + 3\cdot 1! - 0! = 2 \\ x_4 = 4! - 4\cdot 3! + 6\cdot 2! - 4\cdot 1! + 0! = 9. \end{cases}$$

Proseguendo così si trova poi:

$x_5 = 5\cdot 9 - 1 = 44;$
$x_6 = 6\cdot 44 + 1 = 265;$
$x_7 = 7\cdot 265 - 1 = 1854;$
$x_8 = 8\cdot 1854 + 1 = 14833;\quad x_9 = \ldots$

Ritornando al simbolo $S(m)$, è precisamente questo numero (definito dall'ultimo membro di (6) ed indicato anche con $!m$) il "subfattoriale di m". Sua proprietà caratteristica è la legge di ricorrenza [ricavabile facilmente ancora da (6)]:

$$!0 = 1;\ \ \forall m>0\ \ !m = m\cdot[!(m-1)] + (-1)^m \tag{7}$$

molto simile alla legge di ricorrenza dei fattoriali:

$$0! = 1;\ \forall m>0\ \ m! = m\cdot(m-1)! \tag{8}$$

Tornando al quiz, la (6) ci dice che la probabilità $p(n,0)$ di azzeccare 0 abbinamenti su n è $!n/n!$; ma anche che essa tende rapidamente ad $1/\mathrm{e}$ al crescere di n. Per $n\to\infty$, la probabilità di azzeccare k abbinamenti su n (che esattamente vale

$p(n,k)=G(n,k)/n!=C(n,k)[!(n-k)]/n! =[!(n-k)]/(n-k)!]/k!$),

tende - purché anche $n-k\to\infty$ - asintoticamente alla legge:

$$p(n,0) = \frac{1}{\mathrm{e}};\quad p(n,k) = \frac{p(n,0)}{k!} = \frac{1}{\mathrm{e}\cdot k!}\ . \tag{9}$$

2009: duecento anni dalla nascita di Darwin

di Luciano Corso

La teoria della selezione naturale e dell'evoluzione di Darwin

Il pensiero di Charles Darwin (1809-1882) costituisce per la scienza un vero e proprio salto innovativo, rispetto alle concezioni deterministiche del primo Ottocento, perfettamente compendiate da Laplace. Quest'ultimo condivideva la visione della scienza di Galilei e. andando oltre, riteneva di poter ricostruire con il puro uso della ragione, con il formalismo della matematica e della fisica, e con l'esperienza ogni sequenza di cause a ritroso in grado di spiegare ogni effetto scientificamente (in senso galileiano) sperimentabile sulla Terra. Darwin, con la sua teoria dell'evoluzione e della selezione naturale, mette in crisi questa idea.

Conviene ribadire alcuni passaggi della sua elaborazione scientifica e filosofica.

1) Il metodo scientifico deve considerare anche l'aspetto storico dei fenomeni naturali (storicizzazione): sotto questo aspetto, si cerca di spiegare eventi e processi che hanno già avuto luogo e che non sono propriamente riproducibili in laboratorio. Il dato sperimentale, in questo caso, è unico e non ripetibile. Si cercano così gli anelli mancanti di una interpretazione provvisoria dei fatti osservati, tentando di far quadrare le teorie per approssimazioni successive in quanto i fenomeni naturali seguono processi evolutivi tali da impedire di pensare che ciò che è valido oggi, come chiave interpretativa delle leggi di natura, lo possa essere anche domani.

2) È fondamentale l'importanza del caso come selettore di regole valide per il futuro, caso che non viene più considerato come determinato da una carenza di informazioni sullo stato di natura, ma come serie di fattori accidentali incontrollabili ed imprevedibili che intervengono quando uno meno se lo aspetta e modificano in modo definitivo lo stato delle cose, indipendentemente dall'uomo e dal suo stato di conoscenza.

3) Abbandono del finalismo. Non appare in natura un fine alla dinamica del mondo, alle sue leggi.

Una delle critiche mosse alla teoria dell'evoluzione di Darwin è che essa non ha alcuna consistenza matematica. Una teoria, per essere scientifica, si dice che deve avere un contenuto matematizzabile e controllabile formalmente. Darwin, in effetti non sviluppa bene la sua teoria dal punto di vista formale anche se, conoscendo la tesi malthusiana della crescita demografica e delle risorse, in qualche modo ebbe un supporto matematico di riferimento. Ricordiamo che Thomas Robert Malthus – prete anglicano – affermò verso la fine del Settecento [B.1], che mentre la crescita demografica, al variare del tempo, era di tipo geometrico (esponenziale), quella delle risorse economiche era di tipo lineare; così di periodo in periodo, il divario tra beni economici disponibili per soddisfare i bisogni umani e quest'ultimi cresceva continuamente. Ciò come conseguenza, portava a un aumento della competizione per la sopravvivenza degli individui e allo stato di indigenza di alcune categorie sociali (quelle più deboli). Se l'affermazione di Malthus fosse stata vera per ogni specie biologica, allora il principio di selezione naturale diventava una sua conseguenza. Darwin riconobbe l'importanza che ebbero le tesi di Malthus per la sua teoria della selezione naturale.

Purtroppo Darwin non conosceva i risultati di Mendel. Se li avesse conosciuti forse si sarebbe orientato meglio nello sviluppo formale della sua teoria.

Il monaco cecoslovacco Gregor Johann Mendel [1822, 1884] studiò a Vienna Scienze Naturali e Matematica e passò la sua vita nel chiuso di un convento di San Tomaso nella città di Brno. Tuttavia riuscì con grande semplicità a preparare esperimenti che successivamente si rivelarono straordinariamente fecondi sia come metodi di lavoro, sia come risultati conseguiti e convalidanti la teoria della selezione naturale.

Mendel dopo essersi posto il problema di come i caratteri ereditari (geni) degli individui viventi si trasmettono di generazione in generazione costruì un importante esperimento prendendo delle piantine di pisello. Dalla constatazione che i piselli hanno caratteri che si manifestano in modo diverso in generazioni successive, si pose il problema di verificare come questi caratteri si trasmettevano da una piantina a un'altra nuova durante il processo generativo.

Chiamiamo A la modalità forte (dominante) di un carattere relativo a un certo gene di una piantina di piselli e a la modalità debole (recessiva) dello stesso carattere. Per esempio, se prendiamo il carattere "colore del fiore" e i colori sono di due tipi bianco e rosso, se A = "rosso" e a = "bianco", allora nella generazione successiva la nuova piantina di piselli avrà evidente la modalità A = "rosso" e, latente, la modalità a = "bianco".

Come si trasmettono queste due modalità di questo carattere alle generazioni future? Mendel dimostrò con una precisa documentazione che la trasmissione segue lo schema probabilistico presentato nella tabella 2. Mendel prese in considerazione diversi caratteri (si veda la tabella 1 e concluse che valeva la regola probabilistica espressa in tabella 2. Dalla tabella 1 si può notare che il rapporto recessivo/totale per ogni modalità di apparizione di ciascun carattere analizzato risulta essere pari a circa ¼. Ciò giustifica quanto espresso nel modello della tabella 2. In generale, in base alla tabella 2, il carattere forte (dominante ora diciamo) A (fenotipo) ha probabilità $P(AA) + P(Aa) + P(aA) =$ 3 / 4 di presentarsi nella generazione futura, mentre il carattere recessivo a (fenotipo) ha probabilità $P(aa)$ = 1 / 4 di presentarsi.

La tabella 2 rappresenta una buona approssimazione teorica di ciò che è stato il risultato sperimentale di Mendel [B.5]. Il risultato di Mendel rimase del tutto sconosciuto fino quasi alla fine del secolo; costituisce, tuttavia, la prima fase decisamente scientifica della biologia e *il fondamento della moderna genetica*. Rappresenta, inoltre, una splendida applicazione della forza esplicativa della statistica. Si consideri che Darwin non seppe mai di questo risultato raggiunto da Mendel. Nel secolo Ventesimo la genetica ebbe uno sviluppo notevole e i meccanismi dell'ereditarietà studiati da Mendel subirono un impulso decisivo. [*Segue al numero 141*]

Tabella 1. Risultati dell'esperimento di Mendel sulle piante di pisello

	Incrocio originale		Generazione F_2		
Carattere	Dominante	Recessivo	Dominante	Recessivo	totale
Forma del seme	non rugoso	rugoso	5474	1850	7324
Colore del seme	giallo	verde	6022	2001	8023
Posizione del fiore	assiale	terminale	651	207	858
Colore del fiore	rosso	bianco	705	224	929
Forma del baccello	gonfio	ristretto	882	299	1181
Colore del baccello	verde	giallo	428	152	580
Altezza del fusto	alto	basso	787	277	1064

Tabella 2

		Pisello 2 ♂	
		A	a
Pisello 1 ♀	A	1 / 4	1 / 4
	a	1 / 4	1 / 4

Si consideri che i due genotipi Aa e aA sono identici nei risultati rispetto al fenotipo dominante A: tre volte su quattro apparirà, nei figli, l'attributo dominante A, in ogni generazione successiva nelle stesse condizioni.

L'apprendimento della matematica

L'apprendimento della matematica passa anche dallo studio della storia del pensiero matematico, che permette di comprendere come si sono formate le idee portanti della matematica, e dalle applicazioni. Il controllo di ogni concetto sottile si fa mediante le applicazioni. I software applicativi in commercio sono molto utili per questo scopo. Storia e applicazioni costituiscono il fulcro della conoscenza matematica. Non esiste, invece, una matematica descrittiva. (*L.C.*)