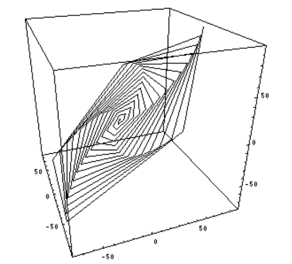
# MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore: Luciano Corso - Redazione: Luciano Corso, Elisabetta Capotosto, Carlo Marchiori, Giovanna Tessari – Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – 338 6416432 – e-mail: lcorso@iol.it – Stampa in proprio - Numero 142 – Pubblicato il 14 – 11 – 2009



## 2009: duecento anni dalla nascita di Darwin

di Luciano Corso

[*Segue dal numero* 141] Per quanto abbiamo fin qui scritto, la teoria dell'evoluzione per selezione naturale di Darwin ha avuto un notevole supporto teorico matematico. Ora si tratta di valutare se nel concetto di caso non si nasconda in realtà una sua manifestazione più debole: quella di "caso vincolato". L'idea di caso vincolato nasce dal fatto che ogni sistema genetico può essere descritto da sequenze ordinate di stringhe che devono rispettare le regole di una sintassi propria che solo se ben applicata dà significato alle "parole" intese come sequenze ordinate di caratteri appartenenti a un alfabeto. Queste regole non consentono un'assoluta casualità nella composizione di una stringa. Viene qui di seguito presentata una possibile interpretazione di caso vincolato allo scopo di chiarirne il concetto e di confrontarne gli esiti con quelli di caso puro.

**Caso e caso con selezione**

Consideriamo una sequenza di 26 +1 simboli che formano un dato alfabeto (per esempio l'alfabeto latino con l'aggiunta dello spazio vuoto, che indicheremo con "Ø"). Vogliamo formare una parola lunga 35 tenendo conto che c'è reinserimento e l'ordine conta. Supponiamo che la "parola" sia:

*Nel mezzo del cammin di nostra vita* (10)

Vogliamo sapere qual è la probabilità che si formi per caso questa "parola" e qual è la probabilità che essa si formi per caso con selezione. Se lo schema combinatorio è del primo tipo, la possibilità che si formi per caso la sequenza di caratteri (10) è pari a
$P(x)=|C|^{-|D|}= n^{-k} = 27^{-35}$.
Questa è una probabilità molto bassa. Siamo nell'ipotesi di un processo assolutamente casuale. Supponiamo ora che si voglia costruire una frase come la (10) e che stavolta ogni volta che si verifichi un carattere vi sia la possibilità di eliminare in sequenza i caratteri successivi che non sono significativi alla luce di quanto è accaduto precedentemente (ipotesi di caso vincolato). La probabilità che si verifichi N nella collocazione della prima pallina delle 35 che si devono collocare nelle 27 scatole che formano l'alfabeto è: $P$(N) = 1 / 27.
Poi, la probabilità che si verifichi E non è più 1 / 27 perché alcuni caratteri dell'alfabeto non possono legarsi alla N nel sistema sintattico della lingua italiana. Vediamo quali sono le possibilità: NA, NE, NI, NO, NU. La probabilità che si verifichi E è $P$(E) = 1 / 5. La probabilità che si verifichi la coppia NE è perciò P(NE) = (1/27)·(1/5) = 1/135. Ancora, le possibili terne in base alle regole sintattiche dell'Italiano sono:
NE∅, NEA, NEB, NEC, NED, NEF, NEG, NEI, NEL, NEM, NEN, NEO, NEP, NEQ, NER, NES, NET, NEU, NEV, NEZ.
La probabilità cercata è:
P(L)=1/20 e P(NEL)=(1/135)·(1/20) = 1/2700.
E così via. Confrontando la probabilità di avere "NEL" nel caso puro con quello di averlo nel caso con selezione si vede che:
P(NEL │caso) = 1 / $27^3$= 1 / 19683
P(NEL │caso con selezione) = 1 / 2700.
Si nota che pur essendo ancora bassa la probabilità che si verifichino i primi tre caratteri della frase (10) è aumentata di sette volte. Cioè il caso con selezione promette una possibilità di successo nell'orientamento selettivo di un individuo di una data specie molto meno improbabile del caso puro. La quarta pallina deve andare nella scatola che rappresenta il vuoto.
Le possibilità sono (con vocabolario in mano): NELØ, NELU.
Le probabilità diventano:
P(Ø)= 1 / 2 e P(NELØ)=(1/2700)·(1/2)=1/5400.
Guardiamo le sequenze NELØB, NELØC, NELØD, NELØF, NELØG, NELØL, NELØM, NELØN, NELØP, NELØQ, NELØR, NELØS, NELØT, NELØV, NELØZ. Da cui otteniamo:
P(M)=1/15 e P(NELØM)=1/(5400·15).
Cerchiamo ora la sequenza: NELØME. Le possibilità sono: MA, ME, MI, MO, MU;
P(E)=1/5 e P(NELØME)=1/(5400·15·5).
Ora si cerca NELØMEZ.
Le possibilità sono: NELØMEA, NELØMEC, NELØMED, NELØMEF, NELØMEG, NELØMEI, NELØMEL, NELØMEM, NELØMEN, NELØMEO, NELØMEP, NELØMER, NELØMES, NELØMET, NELØMEZ.
P(Z)=1/15 e P(NELØMEZ)=(1/(5400·15·5·15).
Poi: NELØMEZE, NELØMEZZ.
P(Z)=1/2 E p(NELØMEZZ)=1/(1/5400·15·5·15·2)
E quindi NELØMEZZO:P(O)=1 e
P(NELØMEZZO)=1 / 12 150 000
Questo valore nell'ipotesi di caso puro è
$27^{-9}$=1 / 7 625 597 484 987
Circa 600 volte più piccolo del caso con selezione. E cosi via.

Si possono fare molte altre ipotesi di caso con selezione. Al momento la genetica può solo confermare che l'orientamento genetico di una specie è dovuto sia al caso, sia ad altri fattori sistematici che dipendono, tra l'altro, anche dalle condizioni di aggregazione delle proteine all'interno delle cellule. In biogenetica, cioè, il caso "selvaggio" è solo un'ipotesi di lavoro con pochi riscontri sperimentali. Inoltre, il caso, nei processi di trasmissione genica agisce su due livelli: instabilità dell'ambiente e instabilità nella trasmissione del DNA da un individuo a un altro.

Il termine "caso" assume spesso sembianze metafisiche in tutte le sue esplicazioni: sia che lo si consideri il prodotto di una carenza d'informazione sullo stato del mondo, sia che lo si ritenga il rappresentante di tutto ciò che è imprevedibile, incontrollabile, ingovernabile (come se fosse l'effetto dell'azione ignota di un demiurgo o la personificazione dell'azione stessa). Fino a poco tempo fa la scienza ha preferito la prima interpretazione di caso, ma dopo i più recenti risultati della fisica quantistica, sta crescendo il peso della seconda. Comunque, è convinzione diffusa che, anche se si può definire con buona precisione il concetto di casualità, è concretamente impossibile dimostrare che un dato evento sia casuale [B.6].

**Darwin a Bergamo Scienza 2009**

Il 4 ottobre 2009, a "Bergamo Scienza", Robert Perlman medico e chirurgo bioevoluzionista della University of Chicago, USA, Giuseppe Remuzzi e Francesco Colotta medico e chirurgo bioevoluzionista del Nerviano Medical Science di Milano hanno intrattenuto il folto pubblico sul tema "I doni di Darwin". Le tesi di Darwin sulle origini delle specie hanno avuto una notevole influenza scientifica e filosofica. Nella ricerca oncologica un consistente filone di studi è orientato verso una interpretazione bioevoluzionistica dello sviluppo dei tumori.

L'opera «On the Origin of Species» è considerata una delle più importanti del pensiero scientifico dell'umanità. Vengono tracciati in essa i fondamenti della teoria dell'evoluzione delle specie mediante selezione naturale. La ricaduta scientifica delle tesi sostenute in questo libro è stata enorme fin dal suo primo apparire.

**Bibliografia:** [B.1] T. R. Malthus (1798), *Saggio sul principio di popolazione*, Einaudi editore, Torino, 1977. [B.2] Charles Darwin, *L'origine delle specie*, Rizzoli ed., Milano, 2009. [B.3] William Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Vol. I, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1968, pagg. 132 e segg. [B.4] Anna Maria Cerasoli e Mauro Cerasoli, *Calcolo delle probabilità*, Zanichelli Bologna, 1987. [B.5] Helena Curtis, *Biologia*, Zanichelli editore, Bologna, 1980. [B.6] Gregory J. Chaitin, *Casualità e dimostrazione matematica*, Quaderni de Le Scienze – Scientific American – n. 98, ottobre 1997, Milano. [B.7] Giuseppe Montalenti, *Introduzione alla genetica*, UTET, Torino, 1971

Ringraziamenti: ringrazio Roberto Chignola, Paolo Scapini, e Mauro Fella, per gli utili consigli di natura biologica da loro ricevuti e per la revisione finale del presente articolo.

# La capacità portante di un ecosistema

La teoria dell'evoluzione delle specie per selezione naturale ha implicitamente confermato che ogni ecosistema ha una propria capacità portante (fattore $K$). Questa idea era, però, già stata elaborata da demografi, matematici e statistici della prima metà del XIX secolo.

I modelli di Gompertz e di Verhulst sono espressi da equazioni differenziali che tengono conto del fattore $K$. Vediamoli:

$$\frac{dX(t)}{dt} = a \cdot X(t) - a \cdot \frac{X(t)}{K} \cdot X(t) \quad , \tag{11}$$

$$\frac{dX(t)}{dt} = \beta \cdot X(t) \cdot \ln\left(\frac{K}{X(t)}\right) \quad . \tag{12}$$

dove $X(t)$ è la numerosità della popolazione di una certa specie in un dato territorio, $a$ il tasso di crescita annua della popolazione, $K$ è la capacità portante del territorio, cioè il carico massimo di individui di quella specie sopportabile dall'ecosistema e $\beta$ è un opportuno parametro. La (11) è l'equazione di Verhulst, mentre al (12) è l'equazione di Gompertz. Il fattore $K$ rappresenta la condizione indispensabile perché si attui la selezione delle specie. Infatti, proprio perché la popolazione di una specie non può crescere senza limiti, essendo questi già fissati dalle risorse finite di un dato ambiente, all'aumentare degli individui di questa specie, aumentano la competizione intraspecifica per l'accaparramento delle risorse che permettono di vivere e la selezione di quegli individui che, essendo più deboli, sono meno adatti a procurarsele. *(L. C.)*

# Visione nel regno animale

di Carlo Marchiori

Nelle specie del regno animale l'organo della vista permette di "misurare" la lunghezza d'onda della luce che colpisce l'occhio. Questa misura viene percepita come "colore". La retina dell'occhio delle specie animali è dotata di particolari cellule, dette coni, sensibili alla luce. Generalmente ci sono un numero discreto di tipi di coni, e in ciascun tipo la sensibilità alla luce ha un picco intorno ad una precisa lunghezza d'onda, decrescendo per valori inferiori o superiori (ed essendo del tutto insensibile eccetto che per un intervallo finito dello spettro elettromagnetico).

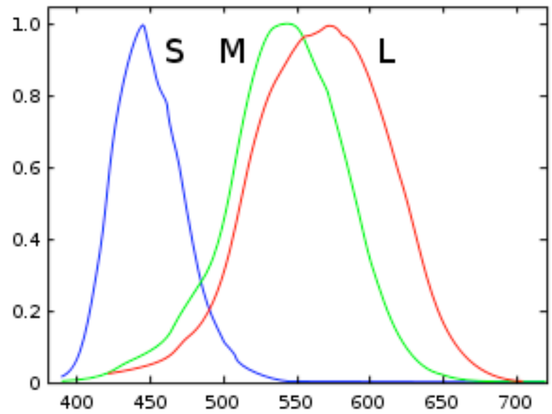
In questa dissertazione vediamo come siano sufficienti due tipi di coni per determinare in modo univoco la frequenza e l'intensità della luce incidente. La maggior parte dei mammiferi è dotata di 2 tipi di coni (dicromia), la specie umana di 3 (tricromia), molti uccelli di 4 (tetracromia). Inoltre vedremo che nel caso di una visione $n$-croma, siano sufficienti sorgenti di $n$ colori fissi e discreti per "ingannare" il cervello e simulare una sorgente di una lunghezza d'onda qualsiasi. Questo 'trucco' ha chiaramente svariate applicazioni, come nella fotografia digitale, nella riproduzione e nella stampa delle immagini.

### Ricostruzione del segnale

Modelliamo l'organo della vista come un numero $n$ di funzioni di risposta $F_i$ dell'intensità $I$ e della frequenza $\nu$ della luce, dipendenti linearmente da $I$:

$$F_i(I,\nu) = I \cdot f_i(\nu) \qquad i \in \{1...n\}\,. \tag{1}$$

dove $f_i(\nu)$ è una generica funzione che dipende dalla frequenza $\nu$. Nell'immagine seguente per esempio è rappresentata la funzione di risposta dei tre coni dell'occhio umano (ascissa in nanometri).




Perché localmente nello spazio dei segnali $(I, \nu)$ sia possibile invertire le funzioni $F_i(I, \nu)$ e ricavare l'intensità $I$ e la frequenza $\nu$ del segnale, a partire dal valore delle funzioni di risposta, è necessario che sia 2 il rango dello Jacobiano $2{\times}n$:

$$[\partial_I F_i, \partial_\nu F_i] = [f_i, I \cdot \partial_\nu f_i] \quad i \in \{1...n\}\,, \tag{2}$$

cioè è necessario che esista una scelta $i \neq j,\ i, j \in \{1, \ldots, n\}$, tali che in un intervallo di $\nu$ sia:

$$f_i(\nu) \cdot \partial_\nu f_j \neq f_j(\nu) \cdot \partial_\nu f_i \tag{3}$$

ovvero se $f_i(\nu) \neq 0$ e $\partial_\nu f_i(\nu) \neq 0$:

$$\frac{\partial_\nu f_j(\nu)}{\partial_\nu f_i(\nu)} \neq \frac{f_j(\nu)}{f_i(\nu)}\,. \tag{4}$$

Alcuni stomatropodi, un ordine di crostacei, possiedono 12 tipi di coni diversi. Tuttavia si ritiene che funzionino a coppie di 2 in diversi intervalli dello spettro di frequenze.

### L'inganno

Supponiamo che una sorgente puntiforme (o percepita tale) sia in grado di emettere luce su un numero $m$ di diverse frequenze discrete e fisse $\nu_k$. Qual è la condizione perché, modulando opportunamente l'intensità $I_k$ di emissione su ciascuna frequenza $\nu_k$ sia possibile ingannare l'occhio facendogli credere di vedere una sorgente monocromatica di intensità $I$ e frequenza $\nu$ qualsivoglia? Chiaramente la condizione è

$$\forall i \in \{1...n\} \qquad I \cdot f_i(\nu) = \sum_{k=1}^{m} I_k \cdot f_i(\nu_k)\,. \tag{5}$$

Si tratta chiaramente di un sistema lineare di $n$ equazioni nelle $m$ incognite $I_k$ che, in base al Teorema di Rouché-Capelli, ammette una soluzione univoca se le $\nu_k$ vengono scelte in modo tale che sia $n = m$ e $det[f_i(\nu_k)] \neq 0$.