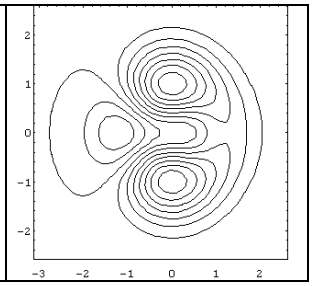
MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore: Luciano Corso - Redazione: Luciano Corso, Elisabetta Capotosto, Carlo Marchiori, Giovanna Tessari – Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – 338 6416432 – e-mail: lcorso@iol.it – Stampa in proprio - Numero 143 – Pubblicato l'11 – 12 – 2009



Campi finiti: piccola nota storica

di Maurizio Emaldi

Il concetto di campo (corpo), inteso come un insieme di numeri che con ogni due numeri a, b contiene $a + b$, $a - b$, $a \cdot b$ e a / b ($b \neq 0$) viene introdotto da N. H. Abel in suoi studi sul problema della divisione della lemniscata. Questo concetto è anche presente nella memoria del 1831 di E. Galois sulle risolubilità delle equazioni algebriche, dove compare come insieme generato da date quantità che non sono necessariamente numeri, dunque come la totalità delle espressioni razionali nelle date quantità. R. Dedekind nel supplemento X alla seconda edizione della "teoria dei numeri" di Dirichlet da lui curata (1871) chiama corpo ogni insieme di numeri algebrici che è chiuso sotto le quattro operazioni razionali ordinarie.

In un articolo del 1893 H. Weber, nel presentare la teoria di Galois delle equazioni algebriche con concetti formulati astrattamente definisce il concetto di corpo come estensione del concetto di gruppo: un corpo «è una famiglia di elementi soggetta a due operazioni, dette somma e prodotto, che soddisfano le condizioni di chiusura, le leggi associativa e commutativa e la legge distributiva. Inoltre, ogni elemento deve avere un unico inverso rispetto a ciascuna delle operazioni, tranne lo zero che non ha inverso moltiplicativo» (M. Kline: Storia del pensiero matematico, vol. II, Dal Settecento a oggi, Biblioteca Einaudi, 1999, Torino, pagine 1335-1336).

Nella nota sulla teoria dei numeri di Galois (1830) troviamo la costruzione di un campo finito, cioè un corpo con un numero finito di elementi, a partire da un dato numero primo e un dato polinomio irriducibile di grado n con coefficienti interi modulo p. Galois mostra che questo campo ha p^n elementi e ne sviluppa un numero di proprietà. Poiché l'esistenza di un campo finito con p^n elementi è equivalente all'esistenza di un polinomio irriducibile di grado n sopra il corpo degli interi modulo p dobbiamo includere Gauss fra i fondatori della teoria dei campi finiti. Infatti, egli nella teoria dei resti (1818) deriva una formula che dà il numero di tali polinomi. Nel 1893 l'americano E. H. Moore dimostra che un qualunque campo finito è isomorfo a un campo come costruito da Galois. Nel 1901 appare il volume "*Linear groups with an Exposition of the Galois Field Theory*" dell'americano L. E. Dickson, che include un rendiconto sistematico della fondazione della teoria dei campi finiti: Dickson chiama campo di Galois ciò che noi chiamiamo campo finito. Nel 1907 Umberto Scarpis, un matematico oggi poco conosciuto, pubblica una "Esposizione elementare de la teoria del campo di Galois" (Giornale di Matematiche di Battaglini, Vol. XLV, pagg. 1-28) con lo scopo di incoraggiare la lettura del volume di Dickson che «riesce a chi per altra via non sia già iniziato a questi studi, talmente ostica da indurre facilmente ad abbandonarlo». "Altra via" consiste nel fondare l'esposizione sulla teoria degli spazi lineari «come si trova esposta nei primi capitoli dell'opera magistrale dei professori Pincherle e Amaldi». L'opera qui intesa ha il titolo "Le operazioni distributive e le loro applicazioni all'analisi" (Edizioni Zanichelli 1901).

Umberto Scarpis nasce a Padova nel 1861, studia nell'Università di questa città avendo tra i maestri il geometra differenziale G. Ricci Curbastro e l'analista F. F. D'Arcais e nel 1884 si laurea in matematica. Inizia la carriera di insegnante di matematica nel Ginnasio Comunale pareggiato di Este e poi nei R. R. Ginnasi di Sciacca, Tortona e Chiari. Nel 1893 ottiene, per concorso, la cattedra del Liceo di Foggia e da qui l'anno successivo viene trasferito al Liceo Maffei di Verona. Qui rimane fino al 1905, nel quale anno, in seguito a concorso, passa al Liceo Minghetti di Bologna. A Bologna si fa apprezzare come insegnante e come cultore della scienza. Ottiene promozioni per merito didattico, viene nominato ispettore regionale di Matematiche e nel 1910 l'Università di Bologna gli conferisce, per titoli, la libera docenza in Algebra Complementare di cui ha l'incarico di insegnamento per un triennio.

Muore a Bologna nel 1921, lasciando in grave lutto la famiglia, la Società Italiana di Matematica Mathesis, di cui era segretario, e la sezione di Bologna di questa società, di cui era presidente.

Lo Scarpis ha pubblicato 22 lavori scientifici. Nel 1891 egli pubblica un volumetto intitolato "Il problema della divisione della circonferenza esposto elementarmente" (Savona, Tipografia D. Bortolotto e C., 72 pagine), nel 1913 l'articolo XXIV dell'opera "Questioni riguardanti le Matematiche elementari" (Zanichelli), articolo intitolato "Sui numeri primi e sui problemi dell'analisi indeterminata". Le altre pubblicazioni sono apparse sui giornali e negli anni qui sotto indicati:

- Annali di Matematica	1911, 1914
- Atti dell'Accademia d'Agricoltura, Arti, e Comm. di Verona	1900
- Bollettino della "Mathesis"	1911
- Giornale di Matematiche di Battaglini	1899, 1900, 1901, 1905, 1907
- Il Bollettino di Matematica	1904
- Periodico di Matematica	1891, 1892, 1903, 1907, 1912, 1914
- Rendiconti del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere	1898

Una di queste pubblicazioni fa conoscere a non specialisti le applicazioni della matematica nell'interpretazione dei fenomeni naturali; una riguarda l'insegnamento della matematica nelle Scuole Classiche; una verte sulla discussione dei problemi riducibili al 2° grado; due risolvono non facili questioni di teoria dei numeri proposte nel Periodico di Matematica dal matematico romano Giovanni Frattini (1852 - 1925) ben noto agli studiosi di teoria dei gruppi; una è quella in cui viene esposta la teoria del campo di Galois; le altre pubblicazioni sono di ricerca in teoria dei determinanti, teoria dei gruppi finiti, teoria dei numeri e teoria di Galois delle equazioni algebriche con i coefficienti in un campo finito. In alcune di queste pubblicazioni conservate presso il Seminario matematico dell'Università di Padova ci sono dediche manoscritte di Scarpis a Ricci Curbastro e a D'Arcais. Per esempio, una di queste dediche è «All'Illustrissimo Sig. Prof.e G. Ricci con segno di gratitudine e stima affettuosa. U. Scarpis»; un'altra è «Un rispettoso saluto all'egregio prof. D'Arcais da un vecchio ma non immemore scolaro. U. Scarpis. Verona 20 – 12 – 1898».

Su un problema di Calcolo delle Probabilità applicato all'Economia

Presso una Facoltà di Ingegneria è stato dato il seguente problema: un negozio è visitato da X clienti al giorno, dove X

è una variabile aleatoria (v. a.) di Poisson con parametro λ.
Ogni cliente, indipendentemente dagli altri, acquista un numero casuale G di oggetti. La densità di probabilità della v. a. G è:

$$P_k = Prob(G = k) = \gamma \cdot (1-\gamma)^k \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \text{ e } \gamma \in (0, 1).$$

Il costo C di un oggetto può essere modellato con una v. a. esponenziale con parametro μ. Tuttavia, quando un cliente compra un numero di oggetti superiore a g, si ottiene uno sconto del $d\%$ sul prezzo.
Si chiede:

a) il numero medio di clienti paganti;
b) il numero medio di articoli venduti;
c) la spesa media di ogni cliente;
d) la spesa media di ogni cliente pagante;
e) la probabilità che un cliente spenda più di s unità monetarie.

Risoluzione

a) I clienti che pagano sono quelli che comprano almeno un oggetto. Per cui questa media è condizionata. Consideriamo W la v. a. numero di clienti paganti. Si ha:

$$M(W) = M(X) \cdot P(G > 0) = \lambda \cdot (1-\gamma) \ , \qquad (1)$$

essendo $P(G > 0) = 1 - P(G = 0) = 1 - \gamma$.
b) Indicata con W la variabile casuale che descrive il numero di articoli venduti in una giornata si ha che:
$W = G_0 + G_1 + G_2 + \ldots + G_X$,
essendo X il numero aleatorio di clienti in una giornata. Pertanto:
$(W \mid X=x) = G_0 + G_1 + G_2 + \ldots + G_x$
dove G_0 è una v.a. che assume valore 0 con $P(G_0=0)=1$ e tutte le altre sono v.a. geometriche di parametro γ.

$$\begin{aligned} M(W|X=x) &= M(G_0 + G_1 + G_2 + \ldots + G_x) \\ &= M(G_0) + M(G_1) + M(G_2) + \ldots + M(G_x) \\ &= 0 + \frac{1-\gamma}{\gamma} + \frac{1-\gamma}{\gamma} + \ldots + \frac{1-\gamma}{\gamma} \\ &= \frac{1-\gamma}{\gamma} \cdot x \qquad , \quad x = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

$$M(W) = M_X[M(W|X=x)] =$$

$$= M_X\left[\frac{1-\gamma}{\gamma} \cdot X\right] = \frac{1-\gamma}{\gamma} \cdot M(X) = \frac{(1-\gamma)\cdot\lambda}{\gamma} \ . \qquad (2)$$

c) La spesa media di ogni cliente
Partiamo dall'ipotesi che lo sconto del $d\%$ sul prezzo viene applicato su tutta la merce acquistata se un cliente compera un numero di oggetti superiore a g.
Detta S la v.a. che descrive la spesa media sostenuta dal cliente, allora la funzione di probabilità di S è la seguente:

$$\begin{cases} 0 & \frac{1}{\mu} & \frac{2}{\mu} & \ldots & \frac{g}{\mu} & \frac{g+1}{\mu}\cdot\left(1-\frac{d}{100}\right) & \ldots \\ \gamma & \gamma(1-\gamma) & \gamma(1-\gamma)^2 & \ldots & \gamma(1-\gamma)^g & \gamma(1-\gamma)^{g+1} & \ldots \end{cases}$$

dove la prima riga ha la successione dei valori di S e la seconda le rispettive probabilità.
Per cui la media è data da:

$$\begin{aligned} M(S) &= \sum_{s\in D_S} s \cdot p_S(s) = \\ &= 0\cdot\gamma + \frac{\gamma}{\mu}(1-\gamma) + \frac{2\gamma}{\mu}(1-\gamma)^2 + \ldots + \frac{g\gamma}{\mu}(1-\gamma)^g + \\ &+ \frac{(g+1)\gamma}{\mu}\left(1-\frac{d}{100}\right)\cdot(1-\gamma)^{g+1} + \frac{(g+2)\gamma}{\mu}\left(1-\frac{d}{100}\right)\cdot(1-\gamma)^{g+2} + \ldots \\ &= \frac{1-\gamma}{\mu}\Big[\gamma + 2\gamma(1-\gamma) + \ldots + g\gamma(1-\gamma)^{g-1} + (g+1)\gamma(1-\gamma)^g + \\ &+ (g+2)\gamma(1-\gamma)^{g+1}\ldots\Big] - \frac{d}{100\mu}(1-\gamma)^{g+1}\big[\gamma(g+1) + \\ &+ \gamma(g+2)(1-\gamma) + \gamma(g+3)(1-\gamma)^2 + \ldots\big] = \\ &= \frac{1-\gamma}{\mu}\cdot\frac{1}{\gamma} - \frac{d}{100\mu}(1-\gamma)^{g+1}\left[g+\frac{1}{\gamma}\right]. \end{aligned} \qquad (3)$$

d) La spesa media di ogni cliente pagante
Detta S_p la v. a. che descrive la spesa media sostenuta dai clienti paganti si ha che tale variabile coincide con la v. a. condizionata $(S \mid S > 0)$. Poiché $P(S > 0) = 1 - \gamma$, allora la funzione di probabilità di S_p è la seguente:

$$S_p = \begin{cases} \frac{1}{\mu} & \frac{2}{\mu} & \ldots & \frac{g}{\mu} & \frac{g+1}{\mu}\left(1-\frac{d}{100}\right) & \ldots \\ \gamma & \gamma(1-\gamma) & \ldots & \gamma(1-\gamma)^{g-1} & \gamma(1-\gamma)^g & \ldots \end{cases}$$

Tenuto conto del risultato ottenuto al precedente punto (c) risulta immediatamente:

$$M(S_p) = \frac{1}{\mu\gamma} - \frac{d}{100\mu}(1-\gamma)^g\left(g+\frac{1}{\gamma}\right). \qquad (4)$$

[*Segue al numero* 144]

I problemi della Riforma Gelmini

Il prossimo anno entrerà in vigore la Riforma Gelmini.
Qui di seguito vengono presentati alcuni problemi sollevati da questa Riforma.
1) I programmi ministeriali di matematica sui nuovi corsi di studi che verranno attuati dalla Riforma, non sono ancora stati definiti.
2) Nel Liceo classico si farà talmente poca matematica da compromettere l'accesso stesso degli studenti alle Facoltà scientifiche per la scarsa valutazione che riceveranno nelle prove d'ingresso.
3) Per quanto riguarda gli Istituti Tecnici Industriali, non si sa nulla del tipo di programmi che verranno svolti, dopo la Riforma. Rimarranno quelli attuali, cambieranno? C'è una commissione ministeriale che s'interessa di questo?
4) M@TABEL corrisponde al programma più avanzato per quanto riguarda la didattica innovativa della matematica nei diversi livelli di scuola. Non si è detto nulla sul suo ruolo.
5) Una delle questioni più scottanti è il problema delle cattedre di matematica. Il rischio evidente è che molti colleghi di matematica perderanno il posto, visto che non possono insegnare nella classe di concorso A048. L'idea emersa anche al congresso UMI-CIIM di Verona è che si dovrebbero sostenere:
- la separazione di matematica da fisica (A047) e la nascita di una solo classe di concorso per matematica, unificando la A048 e la A049);
- il rispetto dei diritti acquisiti.
6) Il giudizio degli insegnanti di scuola media superiore sul lavoro della Commissione per la Riforma nominata dal MIUR è molto negativo.
7) La Riforma rivoluziona gli insegnamenti degli Istituti Tecnici Industriali e Commerciali. In particolare, toglie dal corso di Informatica degli ITI ben 12 ore (2/3 di una cattedra) di insegnamento di Matematica! Nel sito *www.mathesisnazionale.it* è reperibile una lettera che il nostro vicepresidente della Mathesis nazionale inviò al Ministro della P.I. su questo argomento.
Sarebbe opportuno raccogliere tutte le osservazioni critiche sulla Riforma per farne un documento da presentare al più presto a ogni livello decisionale della scuola. In particolare, la redazione ritiene importante e si impegna affinché tale documento venga presentato al Congresso Nazionale Mathesis che si terrà a Livorno in aprile 2010.
Chi è disponibile a lavorare su tale documento lo faccia sapere alla redazione (e-mail: *lcorso@iol.it*).