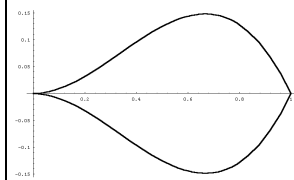


MatematicaMente

Publicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore: Luciano Corso - Redazione: Luciano Corso, Elisabetta Capotosto, Carlo Marchiori, Giovanna Tessari – Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – 338 6416432 – e-mail: lcorso@iol.it – Stampa in proprio - Numero 144 – Uscito il 29 – 12 – 2009



Quaternioni di Hamilton e rotazioni in tre dimensioni

di Maurizio Emaldi

Alla creazione dei quaternioni di Hamilton e al ruolo da essa avuto nello sviluppo della matematica è dedicato il capitolo XXXII del libro "Storia del pensiero matematico. Il Dal Settecento a oggi" di M. Kline (Biblioteca Einaudi 1999). Kline scrive (pag. 906) che i quaternioni di Hamilton sono "un analogo spaziale dei numeri complessi" e aggiunge (pag. 910) - forse è per chiarire l'analogia asserita - "che i quaternioni possano essere usati per far ruotare e allungare o contrarre un vettore dato trasformandolo in un altro vettore dato si vede facilmente. Basta soltanto dimostrare che si possono determinare a, b, c e d tali che:

$$(a + bi + cj + dk)(xi + yj + zk) = (x'i + y'j + z'k),$$

Queste parole di Kline apparentemente dicono, in particolare, che un quaternione q di norma unitaria determina una rotazione dello spazio in tre dimensioni R^3 attraverso l'applicazione $R^3 \rightarrow R^3, r \rightarrow qr$ (il vettore r considerato come quaternione immaginario). Se questo è vero, allora i quaternioni di norma unitaria determinano rotazioni dello spazio in tre dimensioni R^3 esattamente nello stesso modo in cui i numeri complessi di norma unitaria determinano rotazioni del piano R^2 . Ma se il quaternione di norma unitaria q è diverso dal quaternione unità, allora l'applicazione $r \rightarrow qr$ lascia fisso soltanto il vettore nullo e perciò essa non può rappresentare una rotazione. E allora?

Nella sezione 4 del capitolo VIII del libro di O. A. Ivanov "Facile come π . Introduzione alla matematica elementare" (Bollati-Boringhieri, Torino, 1999) viene dimostrato che un quaternione di norma unitaria q determina una rotazione dello spazio R^3 attraverso l'applicazione $r \rightarrow q^{-1}rq$. Qui voglio far vedere che una qualsiasi rotazione di questo spazio viene rappresentata da una tale applicazione.

Consideriamo una rotazione dello spazio R^3 di angolo θ attorno a un asse per l'origine di vettore unitario u . Formiamo il quaternione

$$q = \cos\left(\frac{1}{2}\theta\right) + \left(\sin\left(\frac{1}{2}\theta\right)\right)u$$

che ha norma unitaria, cosicché

$$q^{-1} = \cos\left(\frac{1}{2}\theta\right) - \left(\sin\left(\frac{1}{2}\theta\right)\right)u$$

e pertanto, con la moltiplicazione quaternionale abbiamo

$$q^{-1}uq = u. \quad (1)$$

Prendiamo un vettore unitario v , ortogonale a u . Allora il quaternione $w = uv$ è unitario e ortogonale al piano generato dai vettori u e v . Infatti $uv = -u \cdot v + u \times v$ dove $u \cdot v$ è il prodotto interno e $u \times v$ è il prodotto esterno dei vettori u e v , e $u \cdot v = 0$ poiché u e v sono tra loro ortogonali. Segue che u, v, w formano una base ortogonale orientata dello spazio R^3 . Perciò $q^{-1}rq$ è un vettore ogniquale r è un vettore, e perciò abbiamo una applicazione lineare

$$R^3 \rightarrow R^3, r \rightarrow q^{-1}rq. \quad (2)$$

Tenendo presente che $uv = -vu$, abbiamo

$$\begin{aligned} q^{-1}vq &= \left[\cos\frac{1}{2}\theta - \left(\sin\frac{1}{2}\theta\right)u \right] v \left[\cos\frac{1}{2}\theta + \left(\sin\frac{1}{2}\theta\right)u \right] \\ &= \left[\left(\cos\frac{1}{2}\theta\right)v - \left(\sin\frac{1}{2}\theta\right)w \right] \left[\cos\frac{1}{2}\theta + \left(\sin\frac{1}{2}\theta\right)u \right] \\ &= \left[\cos^2\frac{1}{2}\theta - \sin^2\frac{1}{2}\theta \right] v - \left[2 \cdot \cos\frac{1}{2}\theta \cdot \sin\frac{1}{2}\theta \right] w \end{aligned}$$

ossia

$$q^{-1}vq = (\cos\theta)v - (\sin\theta)w. \quad (3)$$

Calcolando similmente abbiamo

$$q^{-1}wq = (\sin\theta)v + (\cos\theta)w. \quad (4)$$

Le relazioni (1), (3), (4) mostrano che l'applicazione (2) rappresenta la data rotazione.

Su un problema di Apollonio

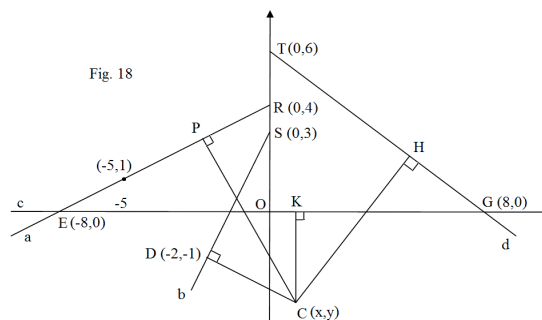
di Nazario Magnarelli

Nell'introduzione al libro VII della "Collezione Matematica" il geometra Pappo (III secolo d. C.) ci fa conoscere il seguente famoso teorema: "Dati nel piano due sistemi di due rette ciascuno, trovare i punti C del piano tali che il prodotto delle distanze del punto C dalle rette del primo sistema sia uguale al prodotto delle distanze di C dalle rette del secondo sistema".

Pappo ci dice che il problema era stato risolto da Apollonio di Perge (III secolo a.C.), il quale aveva mostrato che il punto C sta su una sezione conica.

A distanza di secoli il problema di Apollonio è stato ripreso da Cartesio, nella sua *Géometrie*, il quale ne indica la soluzione seguendo i metodi della Geometria Analitica. Della versione cartesiana del problema parlano molti storici della Matematica; ma, che io sappia, non ci sono pervenuti esercizi che lo illustrano concretamente. Ciò si vuole fare in questa occasione.

Soluzione: Dato nel piano un riferimento cartesiano ortogonale monometrico Oxy , si consideri il sistema di rette $a: X - 2Y + 8 = 0, b: 2X - Y + 3 = 0$, e un secondo sistema dato da $c: Y = 0, d: X + 4Y - 24 = 0$ (fig. 18).



Sia $C(x, y)$ il punto del piano da cui si prendono le distanze e indichiamo in generale le rette con le scritture $A: a_1X + b_1Y + c_1 = 0, B: a_2X + b_2Y + c_2 = 0$ e analoghe. Eguagliando i prodotti delle distanze del punto $C(x,y)$ dai due sistemi di rette si ha l'equazione del luogo; questa è:

$$\frac{(a_1x + b_1y + c_1) \cdot (a_2x + b_2y + c_2)}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2}} = \frac{(a_3x + b_3y + c_3) \cdot (a_4x + b_4y + c_4)}{\sqrt{a_3^2 + b_3^2} \cdot \sqrt{a_4^2 + b_4^2}} \quad (1)$$

Nel nostro caso si ha:

$$\frac{(x - 2y + 8) \cdot (2x - y + 3)}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{y \cdot (3x + 4y - 24)}{1 \cdot \sqrt{25}} \quad (2)$$

Ne segue

$$2x^2 - xy + 3x - 4xy + 2y^2 - 6y + 16x - 8y + 24 = 3xy + 4y^2 - 24y \Rightarrow$$

$$2x^2 - 8xy - 2y^2 + 19x + 10y + 24 = 0 \quad (3)$$

La (3) ci dice che il luogo dei punti $C(x, y)$ da cui vengono prese le distanze, eguagliandone i due prodotti, è una conica, e precisamente è un'iperbole equilatera, essendo $a_{11} + a_{22} = 0$.

Con ciò il nostro asserto è dimostrato.

Vogliamo condurre un rapido studio dell'iperbole.

L'equazione dei diametri coniugati è

$$\lambda(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}) + \mu(a_{21}x + a_{22}y + a_{23}) = 0,$$

ossia

$$\lambda(4x - 8y + 19) + \mu(-8x - 4y + 10) = 0. \quad (4)$$

I punti impropri della conica sono dati dalle radici dell'equazione:

$$a_{11}\lambda^2 + 2a_{12}\lambda\mu + a_{22}\mu^2 = 0 \Rightarrow 2\lambda^2 - 8\lambda\mu - 2\mu^2 = 0. \quad (5)$$

Equazione di secondo grado che ha le radici

$$\lambda = 2 \pm \sqrt{5}, \quad \mu = 1.$$

Sostituendo questi valori nella (4) si ottengono le polari dei punti impropri dell'iperbole, cioè i suoi asintoti:

$$4\sqrt{5}x - (20 + 8\sqrt{5})y + 19\sqrt{5} + 48 = 0 \quad (6)$$

$$4\sqrt{5}x + (20 + 8\sqrt{5})y + 19\sqrt{5} - 48 = 0.$$

Le equazioni degli assi dell'iperbole si ottengono sostituendo nella (4) le radici dell'equazione

$$a_{12}\lambda^2 + (a_{22} - a_{11})\lambda\mu - a_{21}\mu^2 = 0 \Rightarrow \lambda^2 + \lambda\mu - \mu^2 = 0. \quad (7)$$

Procedendo nei calcoli come sopra fatto, si trovano le equazioni degli assi:

$$(20 + 4\sqrt{5})x - 8\sqrt{5}y + 19\sqrt{5} - 1 = 0 \quad (8)$$

$$(20 - 4\sqrt{5})x - 8\sqrt{5}y - 19\sqrt{5} - 1 = 0.$$

Bibliografia: Enrico Giusti, *Ipotesi sulla natura degli oggetti Matematici*, pp. 115.116, Edizioni Bollati Boringhieri, Torino, anno 1999

[*] Socio Mathesis di Latina

Su un problema di Calcolo delle Probabilità applicato all'economia

[Segue dal numero 143]

e) La probabilità che un cliente spenda più di S unità monetarie

Poniamo $Y =$ spesa sostenuta dal cliente. Per cui

$$Y = C_1 + C_2 + C_3 + \dots + C_G \quad \text{e} \quad G \sim \text{Prob}(1; \gamma)$$

$$(G \leq g) \Rightarrow [Y \sim \text{Erl}(G; \mu)]; \quad \text{in quanto } G_i \sim \text{Exp}(\mu),$$

$$(G > g) \Rightarrow [Y \sim \text{Erl}(G; \alpha)]; \quad \text{in quanto } G_i \sim \text{Exp}(\alpha)$$

$$\alpha = \frac{100}{100 - d} \mu = \mu + \frac{d}{100 - d} \mu$$

essendo il prezzo medio scontato

$$\frac{1}{\mu} \left(1 - \frac{d}{100}\right).$$

$$P(Y \leq s) = \sum_{g \geq 0} P(G = g) \cdot P(Y \leq s | G = g)$$

Aggiungendo e sottraendo i termini dello sviluppo contenenti il parametro μ , da $\gamma(1-\gamma)^{g+1}(\dots)$ fino a $+\infty$ per completare la serie, si ricava:

$$= \gamma + \gamma(1-\gamma) \left(1 - e^{-\mu s}\right) + \gamma(1-\gamma)^2 \left(1 - e^{-\mu s} - \frac{e^{-\mu s} \cdot \mu s}{1!}\right) + \dots$$

$$- \gamma(1-\gamma)^{g+1} \left(1 - e^{-\mu s} - \dots - \frac{e^{-\mu s} \cdot (\mu s)^g}{g!}\right) + \dots$$

$$- \gamma(1-\gamma)^{g+2} \left[1 - e^{-\mu s} - \dots - \frac{e^{-\mu s} (\mu s)^{g+1}}{(g+1)!}\right] + \dots$$

$$+ \gamma(1-\gamma)^{g+1} \left[1 - e^{-\alpha s} - \frac{e^{-\alpha s} (\alpha s)}{1!} - \dots - \frac{e^{-\alpha s} (\alpha s)^g}{g!}\right] +$$

$$+ \gamma(1-\gamma)^{g+1} [\dots] =$$

$$= \left[\gamma + \gamma(1-\gamma) + \gamma(1-\gamma)^2 + \gamma(1-\gamma)^3 + \dots\right] +$$

$$- e^{\mu s} \left[\gamma(1-\gamma) + \gamma(1-\gamma)^2 + \dots\right]$$

$$- \frac{e^{-\mu s} (\mu s)}{1!} \left[\gamma(1-\gamma)^2 + \gamma(1-\gamma)^3 + \dots\right] + \dots$$

$$+ e^{-\mu s} \left[\gamma(1-\gamma)^{g+1} + \gamma(1-\gamma)^{g+2} + \dots\right] +$$

$$+ \frac{e^{-\mu s} \mu s}{1!} \left[\gamma(1-\gamma)^{g+2} + \gamma(1-\gamma)^{g+3} + \dots\right] +$$

$$- e^{-\alpha s} \left[\gamma(1-\gamma)^{g+1} + \gamma(1-\gamma)^{g+2} + \dots\right] +$$

$$- \frac{e^{-\alpha s} \alpha s}{1!} \left[\gamma(1-\gamma)^{g+2} + \gamma(1-\gamma)^{g+3} + \dots\right] + \dots =$$

$$= 1 - e^{-\mu s} (1-\gamma) \left[1 + \frac{(\mu s)(1-\gamma)}{1!} + \frac{(\mu s)^2(1-\gamma)^2}{2!} + \dots\right] +$$

$$+ e^{-\mu s} (1-\gamma)^{g+1} \left[1 + \frac{(\mu s)(1-\gamma)}{1!} + \frac{(\mu s)^2(1-\gamma)^2}{2!} + \dots\right] +$$

$$- e^{-\alpha s} (1-\gamma)^{g+1} \left[1 + \frac{(\alpha s)(1-\gamma)}{1!} + \frac{(\alpha s)^2(1-\gamma)^2}{2!} + \dots\right] + \dots =$$

$$= 1 - (1-\gamma) e^{-\mu s} e^{\mu s(1-\gamma)} + (1-\gamma)^{g+1} e^{-\mu s} e^{\mu s(1-\gamma)} +$$

$$- (1-\gamma)^{g+1} e^{-\alpha s} e^{\alpha s(1-\gamma)} =$$

$$= 1 - (1-\gamma) e^{-\mu \gamma s} + (1-\gamma)^{g+1} e^{-\mu \gamma s} - (1-\gamma)^{g+1} e^{-\alpha \gamma s}.$$

Infine:

$$P(Y > s) = (1-\gamma) e^{-\mu \gamma s} - (1-\gamma)^{g+1} (e^{-\mu \gamma s} - e^{-\alpha \gamma s})$$

$$= (1-\gamma) e^{-\mu \gamma s} \left[1 - (1-\gamma)^g + (1-\gamma)^g e^{-\frac{d}{100-d} \mu \gamma s}\right].$$

L'uomo di Nazim Hikmet

Le piante, da quelle di seta fino alle più arruffate.

Gli animali, da quelli di pelo fino a quelli a scaglie.

Le case, dalle tende di crine fino al cemento armato.

Le macchine, dagli aeroplani fino al rasoio elettrico.

E poi gli oceani e poi l'acqua nel bicchiere

E poi le stelle e poi il sonno delle montagne

E poi dappertutto mescolato a tutto l'uomo

Ossia il sudore della fronte, ossia la luce nei libri

Ossia la verità e la menzogna

Ossia l'amico e il nemico

Ossia la nostalgia, la gioia, il dolore.

Sono passato attraverso la folla

Insieme alla folla che passa.