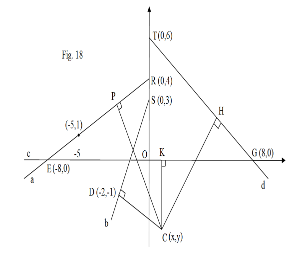
MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore: Luciano Corso - Redazione: Luciano Corso, Elisabetta Capotosto, Carlo Marchiori, Giovanna Tessari – Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – 338 6416432 – e-mail: lcorso@iol.it – Stampa in proprio - Numero 145 – Pubblicato il 15 – 01 – 2010



Lagrange e Galileo

di Luciano Tajoli

Lagrange e Laplace nel XVIII secolo hanno contribuito ad un progresso non indifferente della matematica e fisica. Lagrange poi ha influenzato con le sue idee sul metodo scientifico i positivisti del XIX secolo. Comte lo considerava nel suo "Cours de Philosophie positive" un genio, poiché aveva posto alla base della meccanica, da lui rinnovata e codificata, una concezione storica ed empirica pragmatistica della scienza, in luogo di una astratta [1]. Lagrange guardava con diffidenza e distacco gli scienziati che basavano la visione della realtà fisica su estrapolazioni filosofiche e ideali. Queste estrapolazioni filosofiche le chiamava metafisiche [2]. Coerente con le sue idee visse staccato dalla politica e dalla Rivoluzione (francese). Una conferma delle sue idee al riguardo viene da una lettera inviata al suo amico storico Denina [3] scritta l'11 luglio 1778 da Berlino. Alcuni passi della lettera sono molto interessanti [4]:«*D'ailleurs, j'ai toujours observé que, en général, les Ouvrages qui ont attiré le plus de contradictions à leurs auteurs, n'étaient pas ceux étaient le plus propres à leurs acquérir una réputation solide*» prosegue «*Notre grand Galilée ne doit sa vraie glorie qu'à ses découverts sur le mouvement et sur satellites de Jupiter. Ses fameux Dialogues, auxquales il a dû tous ses malheurs, sont le moins bon de tous ses Ouvrages, et l'on n'en peut plus soutenir*»[7]. Nella lettera non specifica dettagliatamente le ragioni per tale critica, ma si può pesare che non condivideva il confronto che aveva voluto Galileo con l'istituzione religiosa. Questo confronto non è esplicito nel Dialogo dei massimi sistemi ma sottinteso. Confronto che era già evidente quando Galileo scrisse due lettere, una inviata all'amico Castelli nel 1613 e l'altra nel 1615 alla Duchessa Cristina Di Lorena. Il dizionario biografico degli Italiani (Istituto della Enciclopedia Italiana) specifica con chiarezza gli elementi essenziali del contenuto delle due lettere. "Il Galileo vi affrontò due nodi: il rapporto scienza-Rivelazione; i passi biblici usati contro Copernico. Natura e Scrittura, procedenti da Dio, devono concordare; ma in punti religiosamente marginali la Scrittura ha usato metafore o si è adattata *all'intendimento dell'universale*, e l'univocità della tradizione interpretativa su un passo non è decisiva". Le lettere non furono pubblicate nel periodo nel quale vennero scritte, in particolare la lettera indirizzata alla Duchessa Cristina Di Lorena venne pubblicata allegata alla versione latina del Dialogo dei Massimi Sistemi nel 1636 ad Augusta [5]. Lagrange perciò non concepiva che uno scienziato trovasse coerenza tra la sua fede e la sua attività di scienziato. Infatti giudicava quasi impossibile che si potesse conciliare il credo religioso con la scienza. [6] Scrive al suo amico d'Alembert nel 1778 una lettera nella quale sottolinea «*Vous avez bien raison de croire que je n'ai aucune part au programme de Métaphysique*»[7]. Il giudizio di Lagrange su Galileo non diminuì la grandezza della scienziato toscano e mentre il XX secolo ridimensionò il positivismo, il nome di Galileo è sempre attuale poiché quest'ultimo dimostrò nella sua vita di essere oltre che scienziato uomo che voleva testimoniare ciò in cui credeva.

Nota: [1] Lagrange Editrice Torinese 1942 di Filippo Burzio; [2] Idem nota [1]; [3] Denina fu un grande storico del Settecento e scrisse la Rivoluzione in Italia; [4] Idem nota (1); [5] Biblioteca Pisani; [6] Idem nota [1]; [7] Affermazioni di Lagrange riportate testualmente dalla sua lettera.

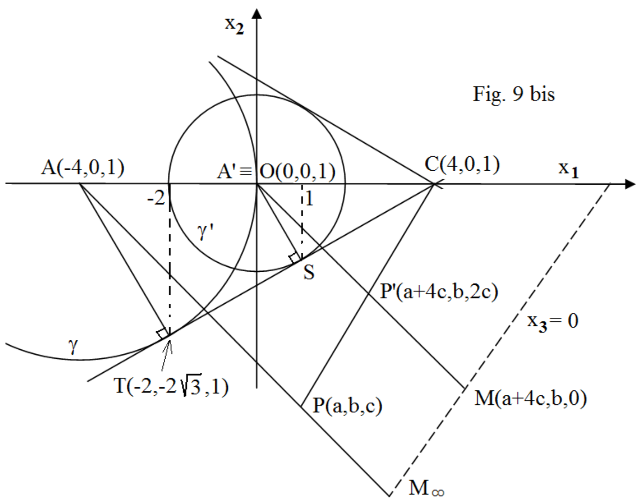
Le omotetie come caso particolare delle omologie

di Nazario Magnarelli

Dato su un piano α un sistema di coordinate cartesiane omogenee $Ox_1x_2x_3$, determinare l'equazione dell'omologia $\varphi(P)$ di centro $C(4, 0, 1)$, avente come asse u la retta impropria $x_3 = 0$ del piano e come coppia di punti corrispondenti i punti $A(-4, 0, 1)$ e $A' = \varphi(A) = O(0, 0, 1)$.
Si dimostri anche che un'omologia di questo tipo si riduce a una omotetia di centro C .

Svolgimento

Sia $P(a, b, c)$ un punto generico dell'omologia; troviamo il suo corrispondente $P' = \varphi(P)$. La costruzione di questa omologia è indicata in fig. 9 bis.
Notiamo anzitutto che le rette corrispondenti a r_{AP} e $r_{A'P'}$, dovendosi incontrare sull'asse dell'omologia, che è la retta impropria, sono fra loro parallele .



Tracciamo la retta r_{AP} e troviamo il suo punto di intersezione M con la retta impropria. Si ha:

$$r_{AP} : \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ -4 & 0 & 1 \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0 ,$$

$$r_{AP} : b\,x_1 - (a + 4\,c)\,x_2 + 4\,b\,x_3 = 0 \ . \qquad (1)$$

$$M = x_3 \cap r_{AP} = \begin{cases} x_3 = 0 \\ b\,x_1 - (a + 4c)\,x_2 + 4b\,x_3 = 0 \end{cases}$$

da cui

$b\,x_1 - (a + 4c)\,x_2 = 0$.

La soluzione è:

$x_1 = a + 4c \quad , \quad x_2 = b \quad , \quad x_3 = 0$.

Il punto improprio M ha le coordinate

$M = (a + 4\,c,\, b,\, 0)$. (2)

Troviamo ora la retta $A'M$ (A' coincide con O) , che è la parallela per A' alla retta r_{AP} . Si ha:

$$r_{A'M} : \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & 0 & 1 \\ a + 4c & b & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

da cui:

$r_{A'M} : b\,x_1 - (a + 4c)\,x_2 = 0$. (3)

Trovo ora la retta r_{CA} , la interseco con la retta $r_{A'M}$ e trovo il corrispondente P' del punto P. Si ha:

$$r_{CP} : \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 4 & 0 & 1 \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0,$$

quindi

$r_{CP} : b\,x_1 - (a - 4c)\,x_2 - 4b\,x_3 = 0$. (4)

Intersecando, come detto, la retta $A'M$ con la retta CP si trova P'. Si ha

$$P' = r_{A'M} \cap r_{CP} = \begin{cases} b\,x_1 - (a + 4c)\,x_2 = 0 \\ b\,x_1 - (a - 4c)\,x_2 - 4b\,x_3 = 0. \end{cases} \qquad (5)$$

Sottraendo la prima equazione del sistema dalla seconda si ha:

$a\,x_2 + 4c\,x_2 - a\,x_2 + 4c\,x_2 - 4b\,x_3 = 0$,

da cui

$8c\,x_2 - 4b\,x_3 = 0$,

ossia

$2c\,x_2 - b\,x_3 = 0$. (6)

La (6) ha la soluzione $x_2 = b$, $x_3 = 2c$.

Sostituendo i valori di queste coordinate nella prima equazione del sistema (5) si ha:

$b\,x_1 - (a + 4c)b = 0$,

da cui

$x_1 = a + 4b$.

Abbiamo trovato che le coordinate del punto P' sono:

$P' = \varphi(P) = (a+4c, b, 2c)$. (7)

Sostituendo ad a, b, c le coordinate di un generico punto $P(x_1, x_2, x_3)$ della omologia, si trova che questa ha le equazioni:

$$T: \begin{cases} \rho\,x_1' = x_1 + 4\,x_3 \\ \rho\,x_2' = x_2 \\ \rho\,x_3' = 2\,x_3\ , \end{cases} \qquad (8)$$

ove ρ è una costante non nulla .

Verifichiamo l'esattezza delle equazioni dell'omologia trovando il corrispondente del centro $C(4,0,1)$, che è un punto unito dell'omologia. Si ha:

$\rho\,x_1' = 4 + 4 = 8\ ,\ \rho\,x_2' = 0\ ,\ \rho\,x_3' = 2$. (9)

Poiché le coordinate x'_1 , x'_2 , x'_3 (e x_1, x_2, x_3) sono determinate a meno di un comune coefficiente di proporzionalità non nullo, possiamo porre $\rho = 2$.

Si trova che il corrispondente del punto $C(4,0,1)$ è $C'(4, 0, 1)$, che coincide con esso. Ne segue che il punto C è unito.

Consideriamo ora le due coppie di punti corrispondenti (A, A') e (P, P').

Dalla fig. 9 bis si vede che per il teorema di Talete si ha:

$$\frac{\overrightarrow{CA'}}{\overrightarrow{CA}} = \frac{\overrightarrow{CP'}}{\overrightarrow{CP}} = k \ \ con \ \ k \in \mathbf{R}_0 \ e \ k > 0. \qquad (9)$$

Ciò ci dice che la corrispondenza di punti indotta dalla nostra omologia è una omotetia diretta di centro C e di rapporto k.

Osservando i triangoli CAP e $CA'P'$ della costruzione geometrica, si vede anche che per il citato teorema di Talete si ha:

$\overrightarrow{AA'} = k\,\overrightarrow{PP'}$, (10)

cioè la nostra corrispondenza trasforma rette in rette parallele. Come sappiamo, questa è un'altra proprietà delle omotetie.

I dati assegnati dal problema ci permettono subito di dire che

$k = \dfrac{CA'}{CA} = \dfrac{1}{2}$.

Mostriamo che sussiste una notevole proprietà; cioè l'omotetia (T) trasforma la circonferenza γ di centro A e raggio $R = 4$ nella circonferenza γ' di centro A' e raggio $r = 2$, ove abbiamo preso intenzionalmente i raggi nel rapporto

$\dfrac{r}{R} = \dfrac{1}{2} = k$.

Le equazioni delle due circonferenze , in coordinate omogenee, sono

$$\begin{aligned} &\gamma : x_1^2 + x_2^2 + 8\,x_1\,x_3 = 0 \\ &\gamma' : x_1^2 + x_2^2 = 4\,x_3^2 \quad . \end{aligned} \qquad (11)$$

Riprendiamo la trasformazione T e troviamo la sua trasformazione inversa T^{-1} ponendo $\rho = 2$. Subito si ottiene:

$T^{-1} : x_1 = 2\,x_1' - 4\,x_3' \quad , \quad x_2 = 2\,x_2' \quad , \quad x_3 = x_3'$.

Sostituendo nell'equazione di γ si ha:

$(2\,x_1' - 4\,x_3')^2 + 4\,x_2'^2 + 8(2\,x_1' - 4\,x_3')\,x_3' = 0$.

Svolgendo i calcoli e semplificando si ha:

$4\,x_1'^2 + 4\,x_2'^2 - 16\,x_1'x_3' = 0$.

Semplifichiamo e passiamo a coordinate omogenee ponendo

$\dfrac{x_1'}{x_3'} = x' \quad e \quad \dfrac{x_2'}{x_3'} = y'$.

Si ottiene

$x'^2 + y'^2 = 4$, (12)

o se si vuole

$\gamma' : x^2 + y^2 = 4$.

Si trova così che la trasformata di γ è la circonferenza omotetica γ'.

Si dimostra facilmente che le rette tangenti alla circonferenza γ' condotte dal centro di omologia $C(4, 0)$ sono tangenti anche a γ. In particolare, la tangente di coefficiente angolare positivo tocca γ' nel punto $S(1, -\sqrt{3})$ e la circonferenza γ nel punto $T(-2, -2\sqrt{3})$.

Bibliografia: M. Beltrametti, E. Carletti, D. Gallarati, G. Montibragadin, *Lezioni di geometria analitica e proiettiva*, Bollati-Boringhieri, Torino, 2002.

Le finalità di un Istituto Tecnico

(*di Luciano Corso*) Il fine educativo dell'ITIS G. Marconi di Verona è di aiutare i ragazzi a diventare adulti con sei precise caratteristiche:

1. una buona capacità critica, cioè una capacità di riflettere sui problemi e di argomentare con coerenza i propri punti di vista scientifici, tecnologici e umani, distinguendo tra valori di verità ed errori;
2. un'abitudine a dare valore al metodo empirico;
3. una competenza tecnologica misurabile e spendibile in contesti professionali;
4. una buona base di conoscenze atta a permettere loro una successiva formazione universitaria;
5. una capacità di essere cittadini del mondo positivi e responsabili;
6. una educazione alla sobrietà e al rispetto delle risorse della Terra.