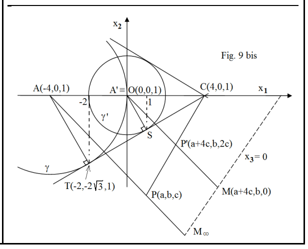
ISSN: 2037-6367

MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore: Luciano Corso - Redazione: Luciano Corso, Elisabetta Capotosto, Carlo Marchiori, Giovanna Tessari – Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – 338 6416432 – e-mail: lcorso@iol.it – Stampa in proprio - Numero 146 – Pubblicato il 5 – 03 – 2010



Un metodo per misurare la concentrazione d'inquinanti

di Luciano Corso

Per concentrazione s'intende il modo in cui l'ammontare complessivo di un certo carattere è distribuito tra n unità statistiche, assumendo in corrispondenza di tali unità i valori $x_1, x_2, \dots, x_n$. Il termine descrive la variabilità di una distribuzione di dati. Se un gruppo di dati è molto concentrato, esso presenta un'alta variabilità, viceversa, se è poco concentrato, presenta una bassa variabilità. Nella concentrazione, però, si fissa l'attenzione sul concetto di trasferibilità.
Sia data una distribuzione di dati $x_1, x_2, \dots, x_n$. Si dice che questi dati sono trasferibili se è possibile per ogni coppia $\{x_k, x_j\}$ spostare una quantità q da x_k a x_j o viceversa:

$$(x_k+q)+(x_j-q)=x_k+x_j \qquad (1)$$

Non tutti i caratteri quantitativi sono trasferibili. Le altezze in centimetri dei maschi alla leva non sono trasferibili. I redditi sono trasferibili, come i capitali o il numero degli appartamenti posseduti per famiglia, o il numero di auto o le unità d'inquinante presenti in un territorio. Non sono trasferibili i pesi delle persone.
Vogliamo avere una misura del grado di concentrazione di un fenomeno. Poniamo n_j la frequenza assoluta di $X=x_j$, Q_i è la quantità cumulata di X fino a x_i e q_i è il valore normalizzato di Q_i.

$$Q_i=\sum_{j=1}^{i} x_j\cdot n_j \quad , \quad \forall i \qquad (2)$$

$$q_i=\frac{Q_i}{Max(Q_i)}=\frac{\sum_{j=1}^{i} x_j\cdot n_j}{\sum_{j=1}^{k} x_j\cdot n_j} \quad , \quad \forall i \qquad (3)$$

Se in un dato territorio, che simuliamo essere una scacchiera 4 × 4, sono presenti 16 unità di tossine relative a un dato inquinante, ed esse sono distribuite come nelle figure 1, 2, 3 come possiamo determinare questi diversi stati di inquinamento?

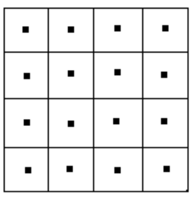


Fig. 1

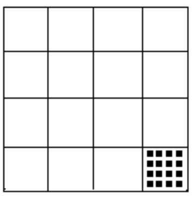


Fig. 2

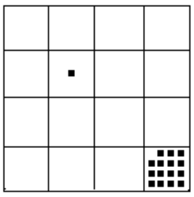


Fig. 3

Per prima cosa osserviamo che le unità inquinanti sono trasferibili da una cella all'altra. Quindi è possibile usare il rapporto di concentrazione del Gini.
Esso è dato da:

$$R=\frac{\sum_{k=1}^{n-1}(p_k-q_k)}{\sum_{k=1}^{n-1}p_k}=\frac{\Delta}{2\cdot m} \qquad (4)$$

Dove

$$p_k=k/n \quad , \quad q_k=Q_k/Max(Q_k) \quad , \quad Q_k=\sum_{j=1}^{k}x_j \quad ,$$

$$\Delta=\frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|x_i-x_j\right|}{n\cdot(n-1)} \qquad (5)$$

con $i\neq j$ e m è la media aritmetica del gruppo di x_k. Si dimostra facilmente che $0 \le R \le 1$. Si nota che rispetto alla (2) nella (5) manca n_j in quanto nel nostro caso $n_j=1$ per ogni j. Le tre distinte situazioni presentate nelle figure 1, 2, 3 sono riportate rispettivamente nelle tabelle 1, 2, 3.

Tabella 1. Figura 1				
k	p_k= k/n	Q_k	q_k=Q_k / Max(Q_k)	p_k-q_k
1	1/16	1	1/16	0
2	2/16	2	2/16	0
3	3/16	3	3/16	0
4	4/16	4	4/16	0
5	5/16	5	5/16	0
6	6/16	6	6/16	0
7	7/16	7	7/16	0
8	8/16	8	8/16	0
9	9/16	9	9/16	0
10	10/16	10	10/16	0
11	11/16	11	11/16	0
12	12/16	12	12/16	0
13	13/16	13	13/16	0
14	14/16	14	14/16	0
15	15/16	15	15/16	0
16	16/16	16	16/16	0

Il caso di fig. 1 dà il seguente risultato:

$$R=\frac{\sum_{k=1}^{n-1}(p_k-q_k)}{\sum_{k=1}^{n-1}p_k}=0.$$

Perciò il caso di massima dispersione d'inquinante sul territorio (corrispondente alla massima entropia) dà un valore di R=0.

Tabella 2. Figura 2				
k	k/n	Q_k	q_k=Q_k / Max(Q_k)	p_k-q_k
1	1/16	0	0/16	1/16
2	2/16	0	0/16	2/16
3	3/16	0	0/16	3/16
4	4/16	0	0/16	4/16
5	5/16	0	0/16	5/16
6	6/16	0	0/16	6/16
7	7/16	0	0/16	7/16
8	8/16	0	0/16	8/16
9	9/16	0	0/16	9/16
10	10/16	0	0/16	10/16
11	11/16	0	0/16	11/16
12	12/16	0	0/16	12/16
13	13/16	0	0/16	13/16
14	14/16	0	0/16	14/16
15	15/16	0	0/16	15/16
16	16/16	16	16/16	0

Il caso di fig. 2 dà il seguente risultato:

$$R=\frac{\sum_{k=1}^{n-1}(p_k-q_k)}{\sum_{k=1}^{n-1}p_k}=\left[\frac{(1+15)}{16}\cdot\frac{15}{2}\right]\bigg/\left[\frac{(1+15)}{16}\cdot\frac{15}{2}\right]=1.$$

Perciò il caso di massima concentrazione corrisponde a un valore di R=1.

Tabella 3. Figura 3				
k	k/n	Q_k	$q_k=Q_k$ / Max(Q_k)	p_k-q_k
1	1/16	0	0	1/16
2	2/16	0	0	2/16
3	3/16	0	0	3/16
4	4/16	0	0	4/16
5	5/16	0	0	5/16
6	6/16	0	0	6/16
7	7/16	0	0	7/16
8	8/16	0	0	8/16
9	9/16	0	0	9/16
10	10/16	0	0	10/16
11	11/16	0	0	11/16
12	12/16	0	0	12/16
13	13/16	0	0	13/16
14	14/16	0	0	14/16
15	15/16	1	1/16	14/16
16	16/16	16	16/16	0

Il caso di Fig. 3 dà il seguente risultato:

$$R=\frac{\sum_{k=1}^{n-1}(p_k-q_k)}{\sum_{k=1}^{n-1}p_k}=$$

$$=\left[\frac{(1+14)}{16}\cdot\frac{14}{2}+\frac{14}{16}\right]\bigg/\left[\frac{(1+15)}{16}\cdot\frac{15}{2}\right]=\frac{119}{120}.$$

Si osserva che se la particella inquinante avesse occupato la quindicesima casella (Fig. 4) , R sarebbe stato uguale; cioè R non è sensibile alla posizione occupata dall'oggetto, ma alla partizione degli oggetti nella scacchiera.
Accentuiamo la dispersione ipotizzando la dispersione di figura 5 (e Tabella 4).

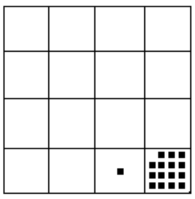


Fig. 4

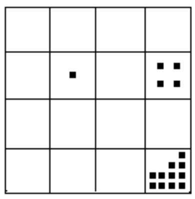


Fig. 5

Tabella 4. Figura 5				
k	k/n	Q_k	$q_k=Q_k$ / Max(Q_k)	p_k-q_k
1	1/16	0	0	1/16
2	2/16	0	0	2/16
3	3/16	0	0	3/16
4	4/16	0	0	4/16
5	5/16	0	0	5/16
6	6/16	0	0	6/16
7	7/16	0	0	7/16
8	8/16	0	0	8/16
9	9/16	0	0	9/16
10	10/16	0	0	10/16
11	11/16	0	0	11/16
12	12/16	0	0	12/16
13	13/16	0	0	13/16
14	14/16	1	1/16	13/16
15	15/16	5	516	10/16
16	16/16	16	16/16	0

In questo caso R diventa:

$$R=\frac{\sum_{k=1}^{n-1}(p_k-q_k)}{\sum_{k=1}^{n-1}p_k}=\frac{114}{120}.$$

Questo valore è un'ulteriore conferma che più le unità inquinanti sono disperse sul territorio, più si abbassa il rapporto di concentrazione.
Si noti che i valori delle caselle della scacchiera sono stati ordinati in ordine non decrescente, prima di applicare il rapporto di concentrazione.

Bibliografia: L'esempio è dell'autore. Per quanto riguarda il rapporto di concentrazione del Gini si suggeriscono i testi seguenti: Enzo Ballatori, *Statistica e metodologia della ricerca*, Galeno Editrice, Perugia, 1988. Luigi Vajani, *Statistica descrittiva*, ETAS Libri, Milano, 1974

MatematicaMente: Codice ISSN

La nostra rivista ha ottenuto il codice d'identificazione internazionale ISSN. Quando è partita nel gennaio del 1998 in testata riportava il nome Mathesis – Società di Scienze Matematiche e Fisiche – sezione di Verona. Questo nome le è rimasto fino al numero 15 del marzo 1999. A partire dal numero 16, la rivista ha preso il nome di MatematicaMente ed è stata registrata presso il Tribunale di Verona con il numero 1360 del 15 – 03 – 1999. Nell'assegnare il codice ISSN, il centro IS SN del CNR ha dato due codici distinti alla rivista. Fino al numero 15 il codice è:

ISSN: 2037-6359

assegnato alla rivista Mathesis - Società di Scienze Matematiche e Fisiche - sezione di Verona [Testo stampato].
Dal numero 16 compreso in poi il codice è:

ISSN: 2037-6367

assegnato alla rivista MatematicaMente – di proprietà della Mathesis - Società di Scienze Matematiche e Fisiche – sezione di Verona.
Con questo codice la rivista è univocamente identificata. Peraltro il codice vale per tutti i numeri, anche arretrati, della rivista.