MatematicaMente

ISSN: 2037-6367

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore: Luciano Corso - Redazione: Luciano Corso, Elisabetta Capotosto, Carlo Marchiori, Giovanna Tessari – Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – 338 6416432 – e-mail: lcorso@iol.it – Stampa in proprio - Numero 147 – Pubblicato il 25 – 05 – 2010

Misurare la dispersione edilizia [1]

di Luciano Corso

Consideriamo $M(l)$ la dispersione media delle distanze di ciascuna abitazione da un punto medio ideale all'interno di una data zona e R il coefficiente di correlazione lineare. Allora le statistiche

$$M(l)=\sqrt{\sigma_x^2+\sigma_y^2} \quad e \quad R=\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x\,\sigma_y} \qquad (1)$$

sono due buone misure delle distanze medie tra i manufatti. Maggiore è il valore $M(l)$ e più alta risulta la dispersione delle costruzioni edili sul territorio. La dispersione può risultare, però, da una dislocazione sparsa e casuale su una certa area geografica oppure da una dislocazione sparsa e disordinata lungo una direttrice lineare (caso famoso quello di Los Angeles, negli USA). Per verificare ciò, occorre calcolare anche R il quale evidenzia se la dislocazione sparsa è lungo una direttrice lineare oppure no. Si può dimostrare che $-1 \le R \le 1$. Quanto più R è vicino allo zero, tanto più i nuclei abitativi sono dislocati in modo sparso, non lungo direttrici lineari. Al contrario, se R è prossimo a -1 o +1 i nuclei abitativi, comunque siano dispersi, lo sono lungo le direttrici lineari.

Facciamo un esempio di applicazione delle formule (1). Supponiamo di avere n=4 nuclei abitativi dislocati in un territorio di 5 km × 5 km = 25 km^2 e che la carta topografica di quel territorio indichi i nuclei alle seguenti coordinate (Fig. 1):

P_1 : (x_1 = 0,5 km ; y_1 = 1 km)
P_2 : (x_2 = 1,5 km ; y_2 = 4 km)
P_3 : (x_3 = 4 km ; y_3 = 2 km)
P_4 : (x_4 = 5 km ; y_4 = 5 km)

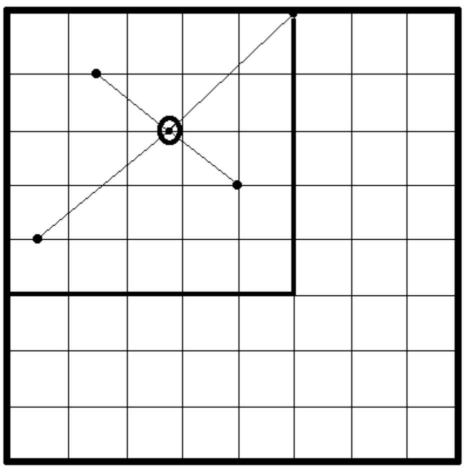


Fig. 1

Usando le (1) si giudichi la dispersione abitativa di quel territorio.

$M(x)$ = (0,5 km + 1,5 km + 4 km + 5 km) / 4 = 2,75 km
$M(y)$ = (1 km + 4 km + 2 km + 5 km) / 4 = 3 km

$$\sigma_x^2=\Big[(0.5-2.75)^2+(1,5-2,75)^2+ (4-2.75)^2+(5-2.75)^2\Big]\cdot km^2\cdot\frac{1}{4}\cong 3,3125\,km^2$$

$$\sigma_y^2=\Big[(1-3)^2+(4-3)^2+(2-3)^2+(5-3)^2\Big]\cdot km^2\cdot\frac{1}{4}=2,5\,km^2$$

$$M(l)=\sqrt{(3,3125+2,5)\,km^2}\cong 2,41091\,km$$

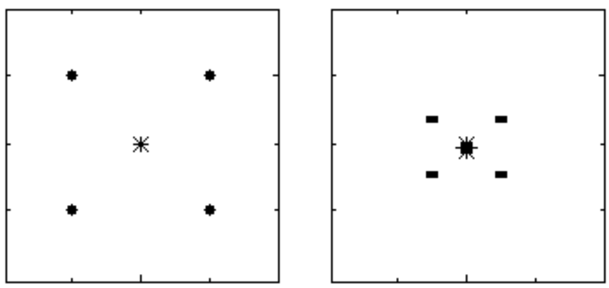
$$R=\frac{Cov(x,y)}{\sigma_x\cdot\sigma_y}=\frac{M\big[(x-\bar{x})\cdot(y-\bar{y})\big]}{\sqrt{3,3125}\cdot\sqrt{2,5}}=$$
$$=\big[(0,5-2,75)(1-3)+(1,5-2,75)(4-3)+(4-2,75)(2-3)+ (5-2,75)(5-3)\big]/4\cdot\sqrt{3,3125}\cdot\sqrt{2,5}=$$
$$=\frac{1,625}{\sqrt{3,3125}\cdot\sqrt{2,5}}\cong 0,5647$$

La distanza media dei nuclei abitativi dal loro baricentro è di 2,41091 km. Inoltre, i nuclei presentano coordinate X e Y con una correlazione lineare modesta; perciò appare una discreta dispersione abitativa, non lungo una direttrice.
Confrontiamo due casi antitetici, per vedere la capacità segnaletica di questi due indici:
In un quadrato di lato pari a 4 km, sono dislocate 4 abitazioni nei due seguenti modi (Fig. 2):

Caso A	Caso B
(x_1=1 km ; y_1=1 km)	(x_1=1,5 km ; y_1=1,6 km)
(x_2=3 km ; y_2=1 km)	(x_2=2,5 km ; y_2=1,6 km)
(x_3=1 km ; y_3=3 km)	(x_3=1,5 km ; y_3=2,4 km)
(x_4=3 km ; y_4=3 km)	(x_4=2,5 km ; y_4=2,4 km)

Nel caso A, il baricentro è in (x=2, y=2), mentre la distanza media delle 4 abitazioni rispetto al baricentro è:

$$M(l_A)=\sqrt{(1+1)\cdot km^2}\cong 1,4142\,km$$



Caso A Caso B

Fig. 2

e nel caso B il baricentro rimane sempre nella stessa posizione, mentre la distanza media delle 4 abitazioni è:

$$M(l_B)=\sqrt{(0,25+0,16)\cdot km^2}\cong 0,6473\ km.$$

Si vede che A presenta una dispersione abitativa molto maggiore di B. Essendo, poi, R_A=0 e R_B=0, la dispersione non presenta correlazione lineare.

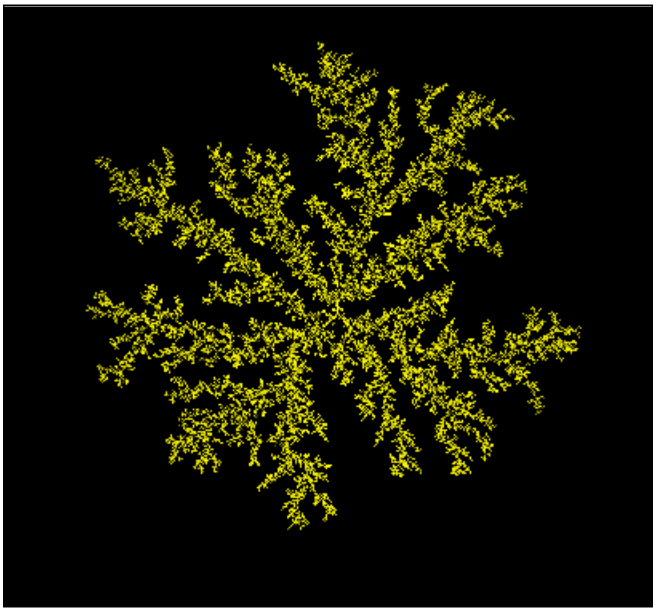
Il coefficiente di correlazione lineare R di Bravais-Pearson, che troviamo nella relazione (1), ha un ruolo importante in questo genere d'indagini.

Non mi risulta che sia stato fatto il calcolo di R per quanto concerne la dislocazione abitativa lungo la fascia pedemontana padana (da Torino a Trieste), ma da quanto è possibile osservare, mediante il satellite artificiale geostazionario, detta fascia presenta una luminosità quasi senza soluzione di continuità e una dispersione abitativa con andamento marcatamente lineare, almeno a tratti.

I casi A e B descrivono sinteticamente una distribuzione di case priva di un orientamento lineare.

In generale, confrontando una distribuzione abitativa con $|R|\approx 1$ e una con $|R|\approx 0$, sotto l'aspetto dell'impatto ecologico, ha meno impatto la prima. Essa, infatti, salva più territorio della seconda (nel senso che nel primo caso si possono preservare caratteristiche di seminaturalità più consistenti).

[1] *Questo esempio, insieme ad altri da me elaborati riguardo all'argomento «Matematica ed Ecologia», è stato esposto a Crotone* (*con il sostegno della sezione locale della Mathesis e dell'Assessorato alla Pace del Comune*)*, presso alcune scuole in data 15 – 16 marzo 2010, e a Vicenza, presso la sezione Mathesis, in data 23 marzo. Per quanto riguarda gli indicatori presi in considerazione in questo articolo* (*si veda la* (1))*, un qualunque manuale di statistica è più che sufficiente per conoscerne le caratteristiche.*



Valutare una risposta a un certa domanda di Fisica

a cura di Alberto Zanardo [*]

Quanto segue è un caso reale documentato dalla Facoltà di Fisica di Londra.

Qualche tempo fa fui chiamato da un collega che mi chiedeva di assisterlo nel valutare una risposta ad una domanda d'esame di Fisica. Intendeva, infatti, dare zero a uno studente per la sua risposta ad un test di Fisica, mentre lo studente sosteneva di meritare il massimo dei voti, e che l'avrebbe senz'altro ricevuto se il sistema non fosse truccato a svantaggio degli studenti. Sia lo studente che l'insegnante concordarono di accettare il giudizio di un giudice imparziale, e il giudice dovevo essere io.

Andai nell'ufficio del mio collega e lessi la domanda d'esame:"*Dimostrare come sia possibile determinare l'altezza di un edificio con l'aiuto di un barometro*".

Lo studente aveva risposto: "Portare il barometro in cima all'edificio, attaccarlo a una lunga corda, calarlo fino alla strada e poi tirarlo su misurando la lunghezza della corda. La lunghezza della corda equivale all'altezza dell'edificio." Feci presente che lo studente aveva effettivamente delle buone ragioni dalla sua, considerando che davvero aveva risposto alla domanda completamente e correttamente. D'altra parte, se gli fosse stato dato il massimo dei voti, questo avrebbe contribuito alla valutazione positiva della sua preparazione in Fisica. Una valutazione positiva dovrebbe certificare la competenza nel campo della Fisica e la risposta non corroborava questa ipotesi. Suggerii perciò di concedere allo studente una seconda possibilità per rispondere alla domanda. Non mi sorprese che il mio collega si dicesse d'accordo: ciò che mi sorprese fu che lo studente si dichiarò d'accordo. Diedi perciò sei minuti allo studente per rispondere alla domanda, previo avvertimento che la risposta avrebbe dovuto dare prova delle sue conoscenze di fisica.

Alla fine dei primi cinque minuti, non aveva ancora scritto nulla. Gli chiesi se volesse ritirarsi, ma rispose di no. Aveva un sacco di risposte al problema, stava solo pensando a quale fosse la migliore. Gli chiesi scusa per averlo interrotto e lo pregai di continuare. Nel minuto successivo, scrisse fulmineamente una risposta che diceva:"Portate il barometro in cima all'edificio e sporgetevi in fuori oltre l'orlo del tetto. Lasciate cadere il barometro, cronometrandone la caduta e quindi, usando la formula $x = 0.5{\cdot}a{\cdot}t^2$, calcolare l'altezza dell'edificio." A quel punto, chiesi al mio collega se volesse arrendersi. Lui accettò, concedendo allo studente quasi il massimo dei voti.

Mentre me ne stavo andando dall'ufficio del collega, mi ricordai che lo studente aveva detto che aveva altre risposte al problema, e gli chiesi quali fossero. "Beh - disse lo studente - ci sono molti sistemi per scoprire l'altezza di un edificio usando un barometro. Per esempio si può portar fuori il barometro in una giornata di sole e misurare l'altezza del barometro, la lunghezza della sua ombra e la lunghezza dell'ombra dell'edificio, e poi, usando una semplice proporzione, determinare la altezza dell'edificio". "Bene - gli dissi - e ci sono altre risposte?"

"Certo. - disse lo studente - C'e' un sistema di misura molto semplice che le piacerà. In questo metodo, si prende il barometro, e si cominciano a salire le scale. Salendo le scale, si segna con un tratto la lunghezza del barometro sulla parete. Poi si contano le tacche, e questo le fornisce l'altezza dell'edificio in barometri; un metodo molto diretto". "Naturalmente. Se vuole un metodo più sofisticato, può legare il barometro ad un pezzo di spago, farlo dondolare come un pendolo, e determinare il valore di g a livello strada ed in cima all'edificio. Dalla differenza dei due valori di g, si può calcolare, in linea di principio, l'altezza dell'edificio. "Parimenti, si può portare il barometro in cima all'edificio, attaccarlo a una corda lunga, calarlo fin quasi a livello strada e poi farlo oscillare come un pendolo. Si può calcolare l'altezza dell'edificio dal periodo della precessione. Infine, - concluse - ci sono molti altri metodi per risolvere il problema. Probabilmente il migliore, - disse - consiste nel portare il barometro nello scantinato, e bussare alla porta del custode. Quando il custode apre, gli si dice così:"Signor Custode, ecco qui un bel barometro. Se lei mi dice l'altezza dell'edificio, io glielo regalo."

A questo punto, chiesi allo studente se davvero non conoscesse la risposta convenzionale alla domanda. Lui ammise di conoscerla, ma disse che si era francamente stufato di docenti universitari che cercavano di insegnargli come pensare.

Ricevetti questa storiella una decina di anni fa dal collega Giuliano Artico. Mi è tornata in mente in queste settimane. Ho sentito Artico che ricorda solo di averla ricevuta via mail, ma non sa dire da chi. Per quanto ne so, l'origine si perde nel labirinto delle e-mail. Ovviamente non abbiamo modo di verificare se la storiella sia vera. Sarebbe proprio bello se lo fosse.

[*] Professore associato di Logica Matematica - Università degli Studi di Padova e Coordinatore del Progetto Lauree Scientifiche del Veneto per la Matematica